

Mathématiques

S. GELLER

2^e ÉDITION

MASSON



CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

Du même auteur

ABRÉGÉ DE STATISTIQUE, à l'usage des étudiants en médecine et en biologie, par S. GELLER. *Abrégés de médecine*. 1979, 3^e édition, 232 pages, 122 figures.

PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE (PCEM)

Fascicule 1. — *Mécanique, thermodynamique, physicochimie*, par C. BENEZECH et J. LLORY. 1973, 480 pages, 202 figures.

Fascicule 2. — *Electricité, électrophysiologie, électronique*, par L. GOUGEROT. 1973, 470 pages, 281 figures.

Fascicule 3. — *Biophysique sensorielle. Audition. Vision. Equilibre vestibulaire*, par M. BURGEAT, Y. GRALL et D. LOTH. 1973, 312 pages, 132 figures.

Fascicule 4. — *Bases de l'utilisation médicale et biologique des radiations*, par J. DUTREIX, A. DESGREZ. B. BOK et C. CHEVALIER. 1973, 236 pages, 110 figures.

ABRÉGÉ DE CHIMIE. Cours. Exercices, tests.

Tome 1. — *Chimie générale*. Cours, 500 exercices, 120 tests, par G. GERMAIN, R. MARI, avec la collaboration de D. BURNEL. *Collection Comprendre et appliquer* : chimie. 1977, 2^e édition revue et augmentée, 288 pages, 62 figures, 1 encart libre.

Tome 2. — *Chimie organique*. Cours, 300 exercices, 100 tests, par V. LOPPINET, avec la collaboration de G. GERMAIN, R. MARIE et D. BURNEL. *Collection Comprendre et appliquer* : chimie. 1976, 368 pages, avec figures.

ABRÉGÉ DE CONSTANTES BIOLOGIQUES, par R.D. EASTHAM. Traduit de l'anglais par G. HOUIN. *Abrégés de médecine*. 1978, 248 pages, 2 figures.

ABRÉGÉ DE BIOPHYSIQUE, par A. BERTRAND, D. DUCASSOU *et al.*

Tome 1. — *Physico-chimie. Electrophysiologie* 1979, 208 pages, 150 figures.

CALCUL MATRICIEL. Cours. Exercices. Tests, par C. GLORMINI et G. HIRSCH. *Collection Comprendre et appliquer* : mathématiques, série : mathématiques pratiques élémentaires. 1977, 112 pages.

ABRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES

par

S. GELLER

*Attaché à la Fondation de Recherche en Hormonologie
(Fac. Méd. de Paris)*

2^e édition

MASSON

Paris New York Barcelone Milan

1979

MASSON S.A.	120 Bd Saint-Germain, 75280 Paris Cedex 06
MASSON PUBLISHING U.S.A. Inc.	14 East, 60 th Street, New York, N.Y. 10022
TORAY-MASSON S.A.	Balmes 151, Barcelona 8
MASSON ITALIA EDITORI S.p.A.	Via Giovanni Pascoli 55, 20133 Milano

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite" (alinéa 1^{er} de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© *Masson, Paris*, 1973, 1978
ISBN : 2-225-63-283-9

Imprimé en France

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	1
CHAPITRE PREMIER. — <i>Introduction à l'étude des fonctions</i>	5
Graphiques	5
Notion de fonction	7
Courbe représentative d'une fonction	8
Fonctions inverses	9
Fonction définie et fonction non définie	10
Intervalle de variation d'une fonction	11
Fonction continue dans un intervalle	11
Fonction croissante et fonction décroissante	12
Maximum et minimum	12
Pente d'une droite	13
Pente en un point d'une courbe	14
CHAPITRE II. — <i>Dérivées</i>	17
Position du problème	17
Exemple introductif	17
Dérivée en un point d'une courbe représentative	19
La dérivée considérée comme une fonction de x	22
Propriétés fondamentales de la dérivée	22
Application à l'étude des fonctions	24
Dérivée et courbure des courbes	24
Notation différentielle	26
Interprétation géométrique de la différentielle	26
CHAPITRE III. — <i>Notions sur le calcul des dérivées</i>	28
Dérivées élémentaires	29
Facteur constant	30
Dérivée d'une somme	30
Dérivée d'un produit	31

Dérivée d'un quotient	32
Fonction de fonction	32
Fonctions inverses	33
Dérivée seconde	34
Dérivées successives	35
 CHAPITRE IV. — <i>Fonctions algébriques simples</i>	 36
Fonction $y = ax$	36
Fonction $y = ax + b$	37
Signification de la fonction linéaire	38
Applications des fonctions linéaires. Droite d'étalonnage	38
Fonction $y = ax^2$	40
Fonction $y = ax^3$	41
Loi de Bragg-Pierce	42
Fonction $y = ax^n$	42
Fonction $y = 1/x$	43
Fonction $y = a/x$	44
Chronaxie-Loi de Weiss	45
Fonction $y = -a/x$	46
Hyperbole équilatère passant par l'origine des coordonnées	46
Courbe de saturation de l'hémoglobine	47
Vitesse de réaction enzymatique	49
Graphique de Lineweaver-Burk	49
Fonction $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt[n]{x}$	50
Isothermes de Freundlich	51
Signification générale : fonction puissance de x	52
Anamorphose linéaire des fonctions algébriques	53
Lois de croissance	54
 CHAPITRE V. — <i>Intégrales</i>	 55
Notion d'aire intégrale	55
Expression mathématique de l'aire intégrale	57
L'intégrale considérée comme une fonction de x	58
Dérivée de la fonction intégrale	59
Solution du problème de l'intégration	60
Constante d'intégration	60
Conditions initiales	61
Intégrale définie et intégrale indéfinie	62
Calcul d'une intégrale définie	63
Echange des bornes	64
Signe d'une intégrale définie	65
Facteur constant dans une intégrale	66
Aperçu sur le calcul intégral	66
Calcul de surfaces	67
Planimétrie	68
Quantité d'électricité	69
Diagramme « pression-volume »	69

Boucle respiratoire	71
Débit cardiaque	71
Débit d'organes. Formule de Ketty-Schmidt	73
 CHAPITRE VI. — <i>Logarithmes naturels</i>	 74
Définition	74
Conséquences	75
Fonction logarithmique	75
Dérivée de la fonction logarithmique	76
Déductions concernant le tracé de la logarithmique	76
Dérivée de $\text{Log } kx$	77
Additivité des logarithmes	77
Logarithme d'un quotient	78
Logarithme de l'inverse d'un nombre	79
Logarithme d'une puissance	79
Base des logarithmes népériens : nombre e	79
Points caractéristiques de la logarithmique	80
Autre définition des logarithmes népériens	81
 CHAPITRE VII. — <i>Logarithmes vulgaires</i>	 83
Définition	83
Rapport avec les logarithmes naturels	83
Courbe représentative de $y = \log x$	84
Dérivée de la fonction $y = \log x$	85
Propriétés des logarithmes vulgaires	85
Base, module	86
Logarithmes décimaux	86
Autre définition des logarithmes vulgaires	87
 CHAPITRE VIII. — <i>Applications des logarithmes</i>	 88
Calculs logarithmiques	88
Echelle logarithmique	89
Circonstances d'utilisation d'une échelle logarithmique	91
Coordonnées logarithmiques et semi-logarithmiques	93
Règles et cercles à calcul	94
Relation logarithmique effet-dose	96
Loi de Weber-Fechner	97
Notion de décibel. Audiométrie	98
Notion de pH	99
Notion de pK, formule d'Henderson-Hasselbach	100
Systèmes tampon	101
Etude de la fonction $\text{pH} = f(x)$ pour un système tampon équimoléculaire	102

CHAPITRE IX. — <i>Fonctions exponentielles</i>	105
Fonction $y = e^x$	105
Dérivée de $y = e^x$	106
Dédutions quant au graphe de e^x	106
Fonction $y = e^{-x}$	107
Dérivée de e^{-x}	107
Dédutions quant au graphe de e^{-x}	108
Fonction $y = e^{-kx}$	109
Dérivée de $y = e^{-kx}$	109
Dédutions quant au graphe de e^{-kx}	110
Signification de l'exponentielle $y = e^{-kx}$	110
Expression linéaire de l'exponentielle e^{-kx}	112
CHAPITRE X. — <i>La décroissance exponentielle en biologie</i>	113
Désintégration radio-active	113
Période radio-active	115
Expression linéaire de l'exponentielle de désintégration radio-active	116
Absorption d'un rayonnement. Loi de Lambert	117
Elimination rénale exponentielle. Notion d'hémikrèse	119
Clearance fractionnelle. Epreuve à la B.S.P.	121
Epreuve d'hyperglycémie intraveineuse. Coefficient d'assimilation glucidique	122
Période biologique et turn-over	124
Transit de la thyroxine marquée	125
Cinétique chimique exponentielle	126
Vidange exponentielle	127
Dilution exponentielle. Courbe de lavage	128
Cardiogramme isotopique	131
Autres exemples de décroissance exponentielle	132
Constante de temps	134
CHAPITRE XI. — <i>Exponentielle dite « ascendante » et ses applications en biologie</i>	135
Courbe représentative de $y = 1 - e^{-kx}$	135
Forme générale de l'exponentielle ascendante	136
Représentation semi-logarithmique de l'exponentielle ascendante	136
Exponentielles ascendantes « complémentaires » d'une décroissance exponentielle	138
Modèle analogique de l'exponentielle ascendante	139
Exponentielles ascendantes des équilibres dynamiques	140
Courbe d'activation du lit capillaire périphérique	141
Intégrale de la fonction $y = e^{-kx}$	143
Dose totale délivrée par un radio-élément	145
Vie moyenne d'un atome radio-actif	146

CHAPITRE XII. — <i>Fonctions avec un ou plusieurs termes exponentiels</i>	148
Terme exponentiel associé à un terme constant	148
Courbe de disparition plasmatique de la B.S.P. après ligature du cholé- doque	149
Terme exponentiel négatif. Coefficient d'assimilation glucidique sous insuline	149
Terme exponentiel associé à un terme linéaire	151
Régulation par action intégrale	151
Somme exponentielle : double fuite exponentielle	152
Epreuve de fixation thyroïdienne de l'iode radio-actif	153
Différence exponentielle	154
Exemples de différences exponentielles	155
Equilibre exponentiel	157
Succession de termes exponentiels	158
CHAPITRE XIII. — <i>Courbe en cloche, courbe sigmoïde, courbe logistique</i> . . .	161
Courbe en cloche	161
Courbe de Gauss	163
Intégrale de la courbe en cloche : courbe sigmoïde	164
Sédimentation des particules d'une solution colloïdale	165
Courbe logistique	167
CHAPITRE XIV. — <i>Equations différentielles</i>	170
Définition	170
Importance des équations différentielles	170
Résolution d'une équation différentielle	171
Equations différentielles du premier ordre à variables séparables	172
Equation différentielle de la loi exponentielle	173
Equation différentielle de la désintégration radio-active	174
Cinétique des réactions monomoléculaires irréversibles	175
Cinétique des réactions chimiques du deuxième ordre	177
Croissance d'une population fermée. Loi de Malthus	179
Equations linéaires du premier ordre	180
Equation linéaire de la décomposition radio-active	181
Réaction réversible du premier ordre	185
Equations différentielles du deuxième ordre	188
CHAPITRE XV. — <i>Fonctions de plusieurs variables</i>	190
Définition	190
Modèle géométrique : fonctions de points	190
Représentation graphique : lignes de niveau	191
Isothermes des gaz parfaits	192
Surfaces de niveau	193
Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables	194

Signification géométrique des dérivées partielles	195
Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables	195
Calculs d'erreurs	197
Pente le long d'un chemin donné	198
Dérivée prise à θ constant	199
Transformation adiabatique d'un gaz parfait	200
Dérivées partielles secondes	201
Théorème de Schwartz	202
Différentielle totale exacte	202
Facteur intégrant	204
Intégrale curviligne	205
Application. Notion d'entropie	207
Intégrales multiples	208
Rappels et compléments	211
1. Puissances	211
2. Logarithmes	215
3. Analyse combinatoire	215
4. Suites. Séries, Développements en série	222
5. Imaginaires	227
Dérivées et intégrales usuelles	237
Index analytique des applications	239
Index alphabétique des matières	241

AVANT-PROPOS

CE PETIT LIVRE s'adresse essentiellement aux étudiants en Médecine et en Biologie dont les programmes comportent désormais, on le sait, un cours de mathématiques.

De manière plus générale, il est destiné à tous ceux qui, comme c'est souvent le cas pour les étudiants en médecine et les médecins eux-mêmes — mais aussi pour les étudiants en sciences naturelles, en sciences économiques, en psychologie, etc. — ne sont pas particulièrement attirés par les mathématiques, mais sont appelés cependant à les utiliser.

Il nous a semblé que la difficulté qu'éprouvent certains esprits à assimiler les mathématiques tenait essentiellement au caractère abstrait de leur support. C'est pourquoi nous nous sommes efforcé de « concrétiser » ce dernier dans la mesure du possible. Ce parti pris rend compte de la *présentation un peu particulière des faits* que nous avons adoptée : nous partons d'un exemple concret et la définition abstraite n'apparaît que comme l'aboutissement de notre démarche. C'est ainsi que pour introduire la notion de dérivée nous prenons pour exemple la croissance d'un enfant qui grandit et nous montrons que si l'on veut apprécier au mieux le taux de croissance l'on est amené à évaluer cette croissance dans des intervalles de temps de plus en plus petits, idéalement infiniment petits, ce qui nous conduit finalement à la définition classique de la dérivée : limite du rapport $\Delta y/\Delta x$ quand Δx tend vers zéro.

D'autre part, le but étant de faire comprendre, *nous avons cherché moins à démontrer qu'à expliquer*. Les médecins font en effet confiance aux mathématiciens, mais ils ne se refusent pas pour autant à comprendre. A cet effet, nous n'avons pas hésité à faire appel à l'intuition du lecteur. En particulier, comme le conseillait du reste l'éminent mathématicien H. Bouasse, nous nous

sommes efforcé d'exploiter au mieux les lumières intuitives qui résultent de la représentation graphique. D'où l'iconographie particulièrement abondante de cet ouvrage qui comporte plus de deux cents figures.

Ce parti pris de concrétisation et de visualisation nous a entraîné à renoncer, bien entendu, au langage mathématique moderne, pourtant si séduisant, mais qui aboutit à abstraire encore davantage l'exposé.

Il nous a paru intéressant par ailleurs de donner au lecteur un aperçu de *l'incidence pratique* des notions qui lui sont présentées. Rien n'est plus irritant en effet pour l'étudiant que d'être obligé d'assimiler des notions théoriques dont il ne perçoit pas l'intérêt dans le cadre de ses préoccupations. C'est pourquoi, chaque fois que cela a été possible, nous avons illustré notre propos par des applications pratiques tirées de la littérature médicale ⁽¹⁾.

Cette optique d'utilité nous a également conduit à insister davantage sur les points qui nous ont paru susceptibles d'intéresser plus particulièrement le futur médecin. C'est ainsi que nous nous sommes étendus plus longuement que ne le voudrait le programme sur les fonctions exponentielles dont la connaissance nous paraît absolument fondamentale pour le médecin et le biologiste.

La plus grande partie de cet ouvrage est dévolue à l'étude des fonctions. Il nous a paru intéressant de compléter cette étude par deux chapitres ayant trait, l'un aux équations différentielles qui jouent un rôle si important dans les sciences expérimentales, l'autre aux fonctions de plusieurs variables. Enfin, nous avons groupé dans une section intitulée « Rappels et Compléments » d'une part des notions élémentaires, mais qu'il nous a paru utile de rappeler, comme la notion de puissance, d'autre part des notions plus complexes, comme les développements en série ou les imaginaires, mais dont l'intérêt nous paraissait secondaire eu égard au cadre que nous nous étions fixé.

Dans le cours de ce travail, il nous est arrivé de prendre, de propos délibéré, certaines libertés avec l'orthodoxie mathématique. Le puriste, qui les reconnaîtra facilement, ne s'en offusquera pas, sachant que cet ouvrage ne lui est pas destiné: Notre excuse à ses yeux sera d'avoir peut-être, par cette voie

(1) Les passages correspondants sont marqués d'un astérisque et repérés par un filet tremblé placé en marge du texte.

détournée, amené aux mathématiques certains bons esprits qui s'y refusaient et, qui sait même, d'avoir peut-être suscité chez eux le désir de lire d'autres ouvrages moins élémentaires et plus orthodoxes que celui-ci.



CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES FONCTIONS

Graphiques

En médecine, en biologie et plus généralement dans les sciences expérimentales, on exprime souvent les résultats observés sous forme de diagrammes ou *graphiques* qui donnent une représentation visuelle des phénomènes étudiés.

Voici par exemple les résultats d'une expérience où l'on a étudié les variations du pH⁽¹⁾, indice, on le sait, de l'acidité, d'une solution d'acide acétique au cours de sa neutralisation par 10 ml d'une solution de soude de même molarité

ml soude	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pH	1,8	3,7	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	5,1	5,3	5,6	7,2

A partir de ce tableau on peut construire le graphique de la figure 1 où les quantités de soude versées sont portées horizontalement et les valeurs correspondantes du pH verticalement.

On voit sur ce graphique que le pH s'élève rapidement avec les premiers millilitres de soude versés, puis plus lentement entre 2 et 8 ml, et qu'il augmente à nouveau très rapidement avec les derniers millilitres de soude versés (fig. 1).

Cette allure si particulière du tracé des variations du pH n'apparaissait pas avec évidence sur le tableau de chiffres à partir duquel le graphique a été construit. C'est là en effet un des avantages majeurs des graphiques : en visualisant les phénomènes, ils permettent d'en faire ressortir immédiatement les caractéristiques essentielles.

(1) Nous expliciterons ultérieurement cette notation.

Un graphique est ainsi beaucoup plus « parlant » qu'un tableau de chiffres. C'est pourquoi, du reste, on recourt si volontiers à ce procédé avec lequel il importe que l'étudiant soit bien familiarisé.

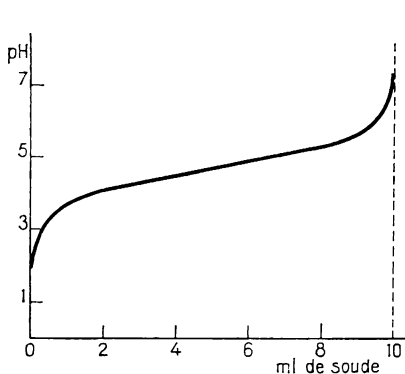


FIG. 1. — Variation du pH d'une solution d'acide acétique en fonction des quantités de soude versées.

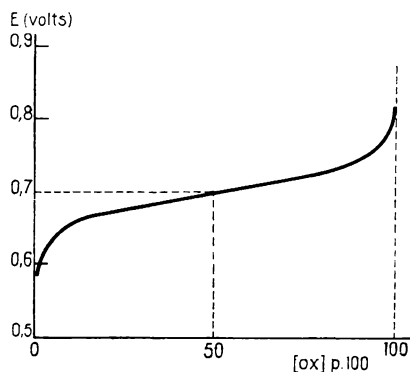


FIG. 2. — Variation du potentiel d'oxydo-réduction E en fonction de la quantité de forme oxydée $[ox]$. (D'après C. BÉNÉZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^e, 1958.)

Considérons maintenant le graphique de la figure 2 qui représente les variations du potentiel d'oxydo-réduction E en fonction de la quantité de forme oxydée $[ox]$. On voit qu'il est tout à fait comparable au précédent.

Ceci suggère qu'il existe un « modèle mathématique » commun susceptible de rendre compte de l'allure si particulière de ces deux courbes expérimentales.

De fait, bien que les graphiques obtenus à partir de l'observation des phénomènes naturels soient très divers, ils peuvent dans de nombreux cas se rapprocher de certaines courbes idéales ayant une expression mathématique bien définie. La connaissance de ces dernières est donc précieuse pour analyser et comprendre la signification des graphiques expérimentaux.

C'est précisément un des buts de cet ouvrage que de rassembler, sous une forme aussi simple que possible, les notions mathématiques susceptibles d'aider à l'interprétation des courbes et des graphiques rencontrés dans les sciences expérimentales et plus particulièrement dans les sciences de la vie.

Notion de fonction

Dans l'exemple précédent, nous avons vu qu'à un nombre donné de ml. de soude versés, *correspondait* une certaine valeur du pH. La valeur du pH *dépend* donc de la quantité de soude versée.

C'est ce qu'on exprime en disant que dans cette expérience de titration le pH de la solution d'acide acétique *est fonction* de la quantité de soude versée.

De manière générale, la notion de fonction exprime une *dépendance entre deux grandeurs* : si une grandeur y dépend d'une autre grandeur x , c'est-à-dire si, pour une valeur donnée x_1 de x , y prend une certaine valeur y_1 , on dira que y est une fonction de x , ce que l'on symbolisera par l'expression :

$$y = f(x)$$

qui se lit « y égale fonction de x » ou, en abrégé, « $y = f$ de x ».

Ainsi l'espace e parcouru par un mobile est fonction du temps t : $e = f(t)$, la pression atmosphérique P dépend de l'altitude h : $P = f(h)$, la taille T d'un sujet est fonction de son âge A : $T = f(A)$, etc.

Plus précisément, *en mathématiques*, la notion de fonction exprime qu'entre deux grandeurs susceptibles de varier, il existe une relation telle que la connaissance de l'une permet de calculer l'autre.

Ainsi, si l'on a la relation $y = (x+3)/(2x-1)$ et si l'on se donne une valeur de x , par exemple $x = 2$, on peut calculer la valeur que prend alors y , soit $5/3$.

x et y sont toutes deux des grandeurs qui varient : ce sont toutes deux des « variables ». Mais il est d'usage d'appeler x celle dont les variations sont primaires et y celle dont les variations sont secondaires, conditionnées par celles de x . La grandeur x est appelée « *variable indépendante* » (par opposition à y qui est une variable « *dépendante* ») et la grandeur y dont on se propose d'étudier les variations est « la fonction » proprement dite ⁽¹⁾.

C'est ainsi que chez un sujet dont la taille varie en fonction du temps ce sont les variations de la taille au cours du temps que l'on désire étudier et non l'inverse : la taille est la fonction, le temps la variable indépendante.

La notion de fonction, il importe de le remarquer, n'implique pas

(1) En réalité, la fonction est la relation elle-même qui lie y à x et y est simplement une valeur de la fonction. Mais l'usage veut qu'on parle de « la fonction y ».

forcément une relation de cause à effet entre la fonction et la variable. Ainsi, le temps n'est pas la cause des variations de la taille d'un sujet qui grandit. La notion de fonction indique donc simplement l'existence d'une dépendance, d'une *relation* entre les variations de deux grandeurs.

Courbe représentative d'une fonction

Cette relation entre les variations respectives de deux grandeurs qui caractérise la notion de fonction peut se traduire graphiquement : Le procédé le plus courant consiste, on le sait, à utiliser deux axes rectangulaires, dits encore « orthonormés », ox , dit « *axe des abscisses* », orienté positivement vers la droite, et oy , dit « *axe des ordonnées* », orienté positivement vers le haut (fig. 3).

Sur Ox on porte $OA = x_1$, c'est-à-dire x_1 fois l'unité choisie pour l'échelle des x . Sur Oy on porte $OB = y_1$, c'est-à-dire y_1 fois l'unité choisie pour l'échelle des y . Les perpendiculaires aux axes respectivement en A et B se rencontrent en P_1 qui a pour abscisse x_1 et pour ordonnée y_1 en coordonnées dites « cartésiennes » ⁽¹⁾.

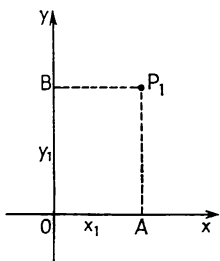


FIG. 3.

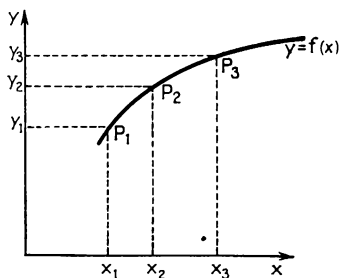


FIG. 4.

Ce point P_1 exprime le fait qu'à la valeur x_1 de x *correspond* la valeur y_1 de y . C'est donc bien l'image de la fonction $y = f(x)$ pour $x = x_1$.

Lorsque x prend d'autres valeurs, x_2 , x_3 , etc., y prend les valeurs correspondantes, y_2 , y_3 , etc., exprimées par les points P_2 , P_3 , etc. (fig. 4).

⁽¹⁾ Du nom de Descartes qui a imaginé cette représentation graphique par référence à un système d'axes rectangulaires.

Les diverses positions P_1, P_2, P_3 , etc., occupées par le point P dessinent alors *une courbe* qui exprime la *relation* existant à chaque instant entre les valeurs respectives de x et de y .

Cette courbe est donc l'image des variations de la fonction y pour les différentes valeurs de x : c'est la *courbe représentative* ou encore, suivant la terminologie moderne, *le graphe* de la fonction $y = f(x)$ (fig. 4).

La courbe représentative résume toutes les variations de la fonction à étudier. En les visualisant, elle fournit de ces variations une image particulièrement évocatrice. Elle permet ainsi le plus souvent de faire comprendre d'emblée, au besoin intuitivement, ce que de longues pages de raisonnement n'aboutissent parfois qu'à obscurcir. C'est dire tout l'intérêt de cette méthode à laquelle nous aurons constamment recours tout au long de cet ouvrage.

L'expression $y = f(x)$ est *l'équation de la courbe*, c'est-à-dire précisément la relation qui existe entre les coordonnées x et y de tout point de la courbe. *Stricto sensu*, fonction et courbe représentative sont donc deux notions distinctes. Cependant, leur dépendance est si étroite que nous n'hésiterons pas à les confondre, parlant indifféremment de *la fonction* ou de *la courbe* $y = f(x)$.

Fonctions inverses

La définition que nous avons donnée d'une fonction implique qu'à une valeur de x correspond une valeur et une seule de y . Si la réciproque est également vraie, c'est-à-dire si à une valeur de y correspond également une seule valeur de x , on dit qu'il y a *correspondance biunivoque* entre x et y . Nous supposons qu'il en est toujours ainsi dans les fonctions que nous étudierons dans le cadre de cet ouvrage.

Dans ce cas, au lieu d'exprimer y en fonction de x , comme dans la relation $y = f(x)$ on peut aussi exprimer x en fonction de y .

Soit, par exemple la fonction $y = 2x + 1$, on en tire $x = (y - 1)/2$, relation où x est exprimé en fonction de y .

La relation $x = \varphi(y)$, où x est exprimé en fonction de y , est dite « *fonction inverse* », ou mieux « *réciproque* », de la fonction $y = f(x)$ ⁽¹⁾.

(1) On ne saurait bien entendu, la confondre avec « l'inverse de la fonction » qui, dans l'exemple cité, serait

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2x+1}.$$

Dans cette nouvelle fonction, x est cette fois la fonction et y la variable indépendante.

Pour en étudier les variations nous devons donc porter en ordonnées les valeurs de la fonction, c'est-à-dire ici x , et en abscisses celles de la variable indépendante, c'est-à-dire ici y . Ceci revient, on le voit, à effectuer une symétrie autour de la bissectrice oz des axes (fig. 5).

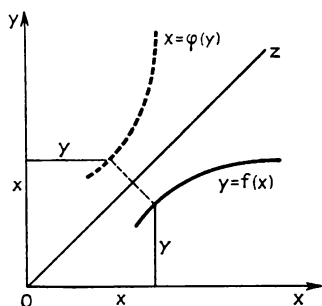


FIG. 5.

Pour tracer la courbe représentative de la fonction inverse $x = \varphi(y)$ il suffira donc de « retourner » la courbe représentative de $y = f(x)$ autour de la bissectrice des axes (fig. 5).

Avec ce procédé, dit encore « échange d'axes », on dispose donc d'une méthode extrêmement commode, à laquelle nous

aurons du reste souvent recours dans le cadre de cet ouvrage, pour passer de l'étude d'une fonction à celle de sa fonction inverse.

Fonction définie et fonction non définie

La relation $y = f(x)$ exprime, nous l'avons vu, qu'à une valeur donnée de x correspond une certaine valeur de y , que cette relation nous permet précisément de calculer. Si ce calcul est possible *quelle que soit la valeur de x* , on dit que la fonction $y = f(x)$ est *définie* pour *toutes* les valeurs de x .

Mais il peut arriver que pour *certaines* valeurs de x on ne puisse pas calculer la valeur correspondante de y . On dit que la fonction *n'est pas définie* pour ces valeurs particulières de x :

Ainsi la fonction

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

n'est pas définie pour la valeur $x = +1$ qui annule le dénominateur.

Lorsqu'on étudie les variations d'une fonction on doit donc se demander avant tout s'il n'y a pas certaines valeurs particulières de x pour lesquelles la fonction ne serait pas définie.

Intervalle de variation d'une fonction

Supposons que la variable x varie entre deux valeurs a et b , b étant supérieur à a .

L'ensemble des valeurs de x comprises entre a et b définit ce que l'on appelle *l'intervalle $[a, b]$ de variation de la variable* ⁽¹⁾.

Graphiquement, si $OA = a$ et $OB = b$ représentent respectivement les valeurs a et b de x , l'intervalle $[a, b]$ est représenté par le segment AB de l'axe des x (fig. 6).

Si l'on recherche quelles sont les valeurs correspondantes que prend y quand x varie dans l'intervalle $[a, b]$, on dit *qu'on étudie la fonction $y = f(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ de variation de la variable*.

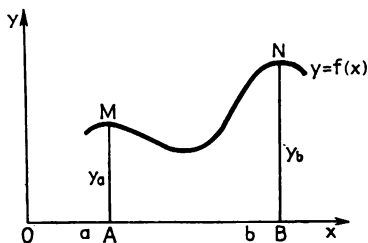


FIG. 6.

Graphiquement, ces variations sont matérialisées par la portion MN de la courbe représentative comprise entre les ordonnées de A et de B (fig. 6).

Fonction continue dans un intervalle

Nous dirons qu'une fonction est continue dans un intervalle $[a, b]$ lorsqu'elle passe de la valeur y_a qu'elle prend pour $x = a$ à la valeur y_b qu'elle prend pour $x = b$ en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Tel est le cas par exemple de la taille d'un sujet qui grandit ou des variations de la température d'un corps qui s'échauffe ou se refroidit.

Graphiquement, on peut considérer qu'une fonction est continue lorsque son tracé ne présente pas d'interruption dans l'intervalle envisagé ⁽²⁾ (fig. 6).

⁽¹⁾ a et b sont les bornes de l'intervalle. Si les bornes sont comprises dans l'intervalle, c'est-à-dire si l'on a $a \leq x \leq b$, on dit qu'on a affaire à un *intervalle fermé*, symbolisé $[a, b]$. Si les bornes ne sont pas comprises dans l'intervalle, c'est-à-dire si l'on a $a < x < b$, l'intervalle est dit *ouvert*, ce qui s'écrit $]a, b[$. Enfin une seule borne peut appartenir à l'intervalle qui est dit alors *semi-ouvert*, soit à droite : $[a, b[$, soit à gauche : $]a, b]$.

⁽²⁾ La définition rigoureuse de la continuité d'une fonction est en réalité, nous le verrons, beaucoup plus complexe. Mais du point de vue pratique nous pouvons, en première approximation, la ramener à une continuité graphique.

Il en sera pratiquement toujours ainsi pour les fonctions étudiées dans cet ouvrage.

Fonction croissante et fonction décroissante

Considérons donc une fonction $y = f(x)$ que nous supposons définie et continue dans l'intervalle $[a, b]$ envisagé.

Dans cet intervalle x peut prendre toutes les valeurs depuis $x_a = a$ jusqu'à $x_b = b$. Il est logique et habituel de ranger ces valeurs par ordre de grandeur croissante. Si, dans ces conditions, les valeurs correspondantes prises par y vont également en augmentant, c'est-à-dire si $y_b > y_a$, on dit que la fonction est *croissante* dans l'intervalle considéré (fig. 7).

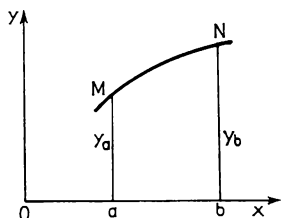


FIG. 7.

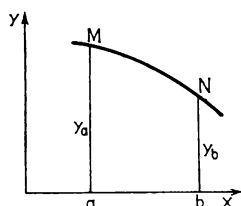


FIG. 8.

Si, au contraire, dans les mêmes conditions, les valeurs correspondantes de y vont en diminuant, c'est-à-dire si $y_b < y_a$, on dit que la fonction est *décroissante* dans l'intervalle considéré (fig. 8).

Dans le cas particulier et favorable des figures 7 et 8, la croissance se traduit par « la montée » et la décroissance par la « descente » de la courbe.

De manière plus générale, on dit d'une fonction continue qu'elle est croissante dans un intervalle lorsque, dans cet intervalle, elle varie dans le même sens que la variable et décroissante lorsqu'elle varie en sens inverse de la variable.

Maximum et minimum

Si, dans un intervalle, une fonction continue et définie en tout point de cet intervalle est d'abord croissante puis décroissante, on voit (fig. 9)

qu'elle passe par un *maximum* où elle atteint sa valeur maximale $y_{\max}$ pour une certaine valeur $x_{\max}$ de x . Dans cet intervalle, la fonction est alors croissante pour les valeurs de x inférieures à $x_{\max}$ et décroissante pour les valeurs de x supérieures à $x_{\max}$ (fig. 9).

Si une fonction répondant aux mêmes critères de continuité et de définition est, au contraire, successivement décroissante puis croissante dans un intervalle, on voit (fig. 10) qu'elle passe par un *minimum* où elle prend sa

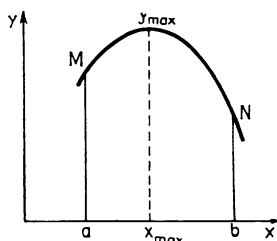


FIG. 9.

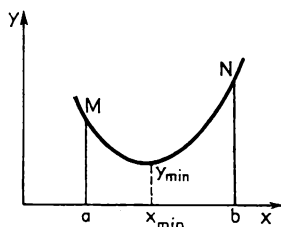


FIG. 10.

valeur la plus faible $y_{\min}$ dans cet intervalle pour une certaine valeur $x_{\min}$ de x .

Dans cet intervalle, la fonction est décroissante pour toutes les valeurs de x inférieures à $x_{\min}$ et croissante pour toutes les valeurs de x supérieures à $x_{\min}$ (fig. 10).

Lorsque dans un intervalle une fonction varie toujours dans le même sens, on dit qu'elle est *monotone* dans cet intervalle (fig. 7 et 8).

Pente d'une droite

Avant de poursuivre cette étude générale des courbes représentatives, il nous faut rappeler ce qu'on entend par la pente d'une droite.

Soit une droite D et deux points A et B de cette droite (fig. 11).

Traçons l'horizontale AH passant par A et soit Q la projection de B sur AH .

Il est clair que plus BQ sera grand *par rapport* à AQ , plus la droite D sera « relevée » sur l'horizontale, plus elle « montera », plus sa « pente » (au sens ordinaire de ce mot) sera forte ($B'Q$ et droite D' , fig. 11).

Inversement, plus BQ sera petit *par rapport* à AQ , plus la droite D sera

abaissée sur l'horizontale, moins elle « montera », plus faible sera sa pente ($B''Q$ et droite D'' , fig. 11).

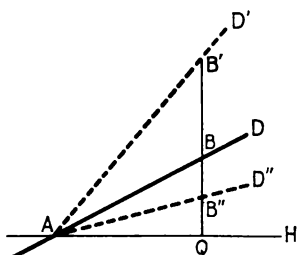


FIG. 11.

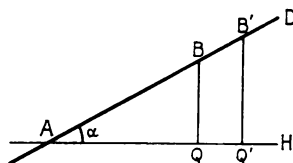


FIG. 12.

Pour caractériser la pente de la droite D , c'est-à-dire son inclinaison plus ou moins marquée sur l'horizontale, on est donc amené à former le rapport BQ/AQ . Ce rapport est appelé *pente de la droite D* :

$$\text{Pente de la droite } D = \frac{BQ}{AQ}.$$

Pour une même position de la droite D , on le remarquera, ce rapport est indépendant de la position du point B .

Soit en effet (fig. 12) un autre point B' et sa projection Q' sur AH . Les triangles rectangles ABQ et $AB'Q'$ sont semblables et on peut écrire :

$$\frac{B'Q'}{AQ'} = \frac{BQ}{AQ} = \text{pente de la droite } D.$$

La valeur de ce rapport dépend seulement de l'angle α que forme la droite D avec l'horizontale AH : à chaque valeur de l'angle α correspond une valeur et une seule du rapport BQ/AQ . Cette valeur, qui sert précisément à caractériser l'angle α ⁽¹⁾, est la *pente* de la droite D .

Pente en un point d'une courbe

Quand les points A et B sont sur une droite, la pente est donc indépendante de la distance entre ces deux points. Elle ne dépend que de la direction

(1) C'est en fait la tangente trigonométrique de cet angle.

de AB , laquelle reste évidemment la même, quelle que soit la position du point B , quand on se déplace sur la droite D entre A et B .

Supposons maintenant que les points A et B soient situés non pas sur une droite, mais sur une courbe (C) (fig. 13).

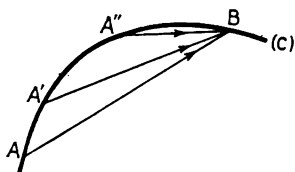


FIG. 13.

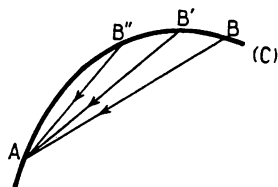


FIG. 14.

Lorsqu'on va de A vers B en suivant la courbe (C), la direction de A vers B change pour chaque position A' , A'' , etc. de A (fig. 13). De même, lorsqu'on se déplace de B vers A , la direction de BA varie avec chaque position B' , B'' , etc. de B (fig. 14).

On ne peut donc pas parler de pente de la courbe (C) entre A et B . Pour pouvoir utiliser cette expression, il faudrait que les points A et B fussent suffisamment rapprochés l'un de l'autre pour que la droite AB se confonde avec le tracé de la courbe (C).

Supposons que B , par exemple, se rapproche de A pour réaliser cette condition (fig. 15). Dans ce cas la sécante AB va occuper successivement les

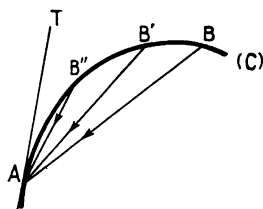


FIG. 15.

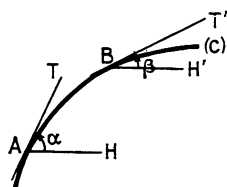


FIG. 16.

positions AB' , AB'' , etc. se rapprochant de plus en plus de la tangente AT à la courbe en A . Mais à mesure que B se rapproche de A , la portion AB de la courbe tend à se confondre avec la sécante AB . A la limite, B vient se

confondre avec le point A et la sécante AB se confond elle-même avec la tangente AT à la courbe au point A . Celle-ci représente donc alors, en quelque sorte, la direction de la courbe à ce niveau.

Il est logique dès lors d'adopter la pente de cette tangente AT pour définir la pente de la courbe C au niveau du point A . Nous dirons donc que la pente de la courbe C au point A est la pente de la tangente à la courbe en A (fig. 16).

De même la pente de la courbe au niveau du point B sera la pente de la tangente BT' à la courbe en B (fig. 16).

De manière générale, par conséquent, lorsqu'il s'agit d'une courbe, on ne peut parler que de *pente en un point*, que l'on définit par la *pente de la tangente à la courbe en ce point*, c'est-à-dire, d'après ce que nous savons de la pente d'une droite, l'angle de cette tangente avec l'horizontale ⁽¹⁾.

Par convention, on considère le plus petit des deux angles que fait la tangente avec l'horizontale, et la pente est comptée positivement si cet angle se situe au-dessus de l'horizontale (fig. 17) et négativement s'il se situe au-dessous (fig. 18).

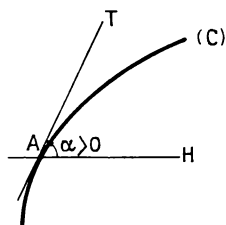


FIG. 17.

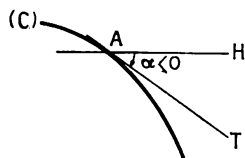


FIG. 18.

⁽¹⁾ Rappelons que cet angle est caractérisé par sa tangente *trigonométrique* qu'on ne doit pas confondre évidemment avec la tangente *géométrique* AT à la courbe.

CHAPITRE II

DÉRIVÉES

Position du problème

Revenons à la courbe des variations du pH, reproduite à la figure 19. Nous expliciterons ultérieurement le tracé de cette courbe, mais nous pouvons dès à présent faire quelques remarques à son sujet : tout d'abord, sa direction générale est ascendante. C'est donc, d'après nos conventions, une fonction croissante. Il apparaît en outre que ce caractère ascendant est beaucoup plus marqué aux extrémités, droite et gauche, de la courbe, qu'à sa partie moyenne. C'est ainsi que l'adjonction de 2 ml de soude *entre 8 et 10 ml* fait passer le pH de 5,3 à 7,2, soit une variation de 1,9, alors que l'adjonction de la même quantité de soude, soit 2 ml, *entre 4 et 6 ml*, fait passer le pH de 4,5 à 4,9, soit une augmentation de 0,4 seulement. Ainsi, à un même intervalle de variation de la variable correspond une augmentation de la fonction beaucoup plus importante dans le premier cas que dans le deuxième (fig. 19).

La croissance d'une fonction peut donc être plus ou moins importante suivant l'intervalle dans lequel on la considère.

Le problème se pose donc de savoir comment on peut se rendre compte de la rapidité avec laquelle varie une fonction, si on peut apprécier en quelque sorte son « *taux de croissance* ».

Un exemple va nous permettre une approche de ce problème :

Exemple introductif

Considérons la courbe représentée à la partie supérieure de la figure 20.

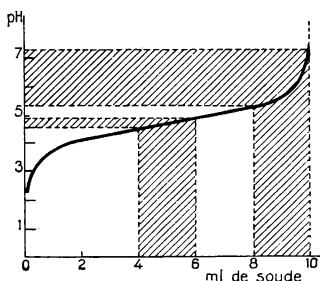


FIG. 19.

C'est la *courbe des tailles* d'un garçon dont la taille a été notée tous les ans de 9 à 20 ans.

A la partie inférieure de cette figure, on a tracé une autre courbe donnant les « *gains de taille* », c'est-à-dire l'accroissement de la taille dans l'année correspondante.

Cette dernière courbe « *dérive* » de la courbe des tailles à partir de laquelle elle a été construite. Ces deux courbes expriment le même phénomène, à savoir les variations de la taille en fonction du temps, avec cette différence cependant que la courbe « *dérivée* » exprime ces variations relativement à un intervalle de temps déterminé, ici l'année.

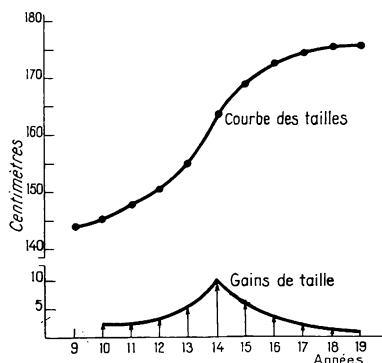


FIG. 20.

Si l'on considère les hauteurs respectives des ordonnées de ce dernier graphique, il apparaît clairement que la croissance s'est faite d'abord à un rythme constant (flèches de même hauteur) jusqu'à l'âge de 12 ans, puis à un rythme plus rapide (la hauteur

des flèches augmente) jusqu'à l'âge de 14 ans, auquel correspond une « *poussée de croissance* », dont témoigne bien l'ordonnée maximale de la courbe des gains à ce moment. Après 14 ans, la croissance se ralentit (la hauteur des flèches diminue) pour s'annuler à partir de 19 ans, âge à partir duquel on peut considérer que la « *croissance* » est achevée.

Cette courbe « *dérivée* » donne donc bien une image de la « *croissance* », c'est-à-dire du « *taux de croissance* » de la taille en fonction du temps.

Toutefois, l'image ainsi obtenue du taux de croissance n'est qu'approchée. En effet, la croissance a très bien pu ne pas être régulière, c'est-à-dire ne pas se faire au même taux, dans l'intervalle d'une même année. C'est ainsi que l'augmentation de 9 cm constatée de 13 à 14 ans a très bien pu correspondre à une augmentation de 3 cm dans les six premiers mois, soit un taux de croissance moyen de 0,5 cm par mois, et à une augmentation de 6 cm dans les six mois suivants, ce qui représenterait un taux de croissance moyen de 1 cm par mois, donc double du précédent, dans les six derniers mois de l'année.

Nous aurions donc obtenu une approximation meilleure du taux de croissance en étudiant la croissance, non pas sur une année, mais sur un intervalle de six mois. Mais, là encore, le taux de croissance a pu ne pas être constant dans l'intervalle de six mois considéré et un raisonnement identique nous montre que si nous désirons une plus grande précision sur le taux de croissance, nous sommes conduits à étudier la croissance dans des intervalles de temps encore plus petits, le mois, la semaine ou même le jour, si l'on pouvait apprécier les variations journalières de la taille.

Ainsi, pour obtenir la « courbe dérivée » qui nous donnera le reflet le plus fidèle du taux de croissance, nous sommes conduits à étudier l'accroissement de la taille dans l'intervalle de temps le plus petit possible.

Appliquons ces notions au cas général de la fonction $y = f(x)$:

Dérivée en un point d'une courbe représentative

Soit une fonction $y = f(x)$, que nous supposons définie et continue dans l'intervalle considéré et dont nous nous proposons d'étudier « le taux de croissance » entre deux points A et B de coordonnées x_1y_1 et x_2y_2 (fig. 21). Lorsqu'on se déplace sur la courbe de A en B , l'abscisse x passe de la valeur x_1 à la valeur x_2 . Elle s'est donc accrue de la quantité $(x_2 - x_1)$ représentée par $A'B'$ qui est « l'accroissement de la variable ».

Corrélativement, l'ordonnée y est passée de y_1 à y_2 . Elle s'est donc accrue de la quantité $(y_2 - y_1)$ représentée par KB (K étant le point de rencontre de l'horizontale passant par A avec l'ordonnée $B'B$ de B). La quantité $(y_2 - y_1)$ est l'accroissement de y , c'est-à-dire de la fonction, correspondant à l'accroissement $(x_2 - x_1)$ de la variable.

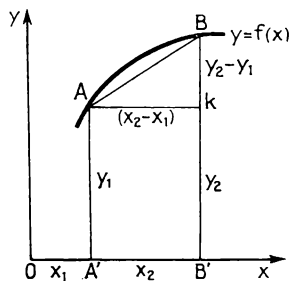


FIG. 21.

Il est clair que « la croissance » de la fonction sera d'autant plus marquée que l'accroissement $(y_2 - y_1)$ de y sera plus grand par rapport à l'accroissement $(x_2 - x_1)$ de x . Pour avoir une idée du taux de croissance de la fonction, on est donc amené à considérer le rapport $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

Notons dès à présent que ce rapport est égal à $KB/A'B'$, donc à KB/AK , et qu'il représente donc, par définition, la pente de la droite AB .

Mais ce rapport donne seulement le *taux moyen de croissance* de la fonction dans l'intervalle considéré AB . Si nous partageons cet intervalle par exemple en 2 par l'ordonnée CC' située à égale distance de AA' et de BB' (fig. 22), on constate que la croissance de la fonction a été plus rapide dans la première moitié AC que dans la deuxième moitié CB de l'intervalle AB , comme en témoigne la pente plus accusée de la droite AC .

Si donc nous voulons avoir plus de précision sur le taux de croissance de la fonction nous devons étudier la croissance correspondant à chacun des demi-intervalles, c'est-à-dire former les rapports CL/AL et BM/CM qui expriment respectivement les pentes de AC et de CB (fig. 22).

Mais un raisonnement analogue peut être fait sur chacun de ces demi-intervalles et si nous voulons une plus grande précision sur le taux de croissance, nous devons étudier la croissance à l'intérieur d'une fraction de ces demi-intervalles ainsi définis.

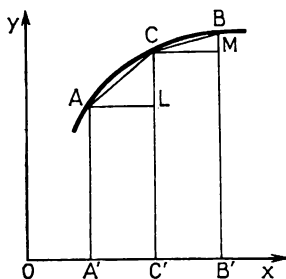


FIG. 22.

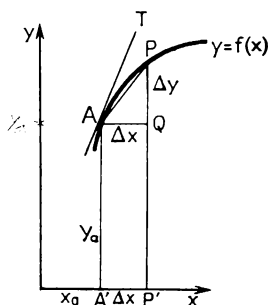


FIG. 23.

Finalement pour avoir la plus grande précision sur le taux de croissance nous sommes amenés, comme dans l'exemple précédent, à *étudier les variations de la fonction dans le plus petit intervalle possible de variation de x* .

Choisissons donc un tel intervalle dont nous désignons la largeur par Δx (qui se lit « delta x »), voulant dire par là qu'elle représente une petite partie de la longueur adoptée pour figurer l'unité sur l'échelle des x .

Considérons par exemple (fig. 23), l'intervalle de largeur Δx limité à gauche par l'ordonnée AA' d'un point A d'abscisse $OA' = x_a$ et à droite par une parallèle PP' menée à une distance Δx de AA' .

Lorsqu'on se déplace sur la courbe de A en P , l'abscisse x_a de A s'est

accrue de $A'P' = \Delta x$, qui est l'accroissement de x . Corrélativement l'ordonnée y_a de A s'est accrue d'une petite quantité, que nous appellerons Δy et qui est représentée par le segment QP , Q étant le point de rencontre de l'horizontale passant par A avec l'ordonnée PP' (fig. 23).

Δy est l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement Δx de la variable. Le taux de croissance de la fonction est donc mesuré par le rapport $\Delta y/\Delta x$, c'est-à-dire $QP/A'P'$, c'est-à-dire QP/AQ qui n'est autre, nous le savons, que la pente de la droite AP .

Pour obtenir la meilleure valeur du taux de croissance, nous devons, d'après ce que nous avons vu, prendre Δx aussi petit que possible, c'est-à-dire rapprocher l'ordonnée PP' le plus possible de AA' . Dans ces conditions P' se rapproche de A' et Δx devient de plus en plus petit, aussi petit que l'on veut : on dit que « l'on fait tendre Δx vers zéro ». Mais au cours de cette manœuvre, P se rapproche aussi de A et QP c'est-à-dire Δy devient aussi de plus en plus petit. On dit que « Δy tend également vers zéro ⁽¹⁾ ». Finalement, quand PP' vient se confondre avec AA' , le point P se confond avec le point A et la sécante AP est devenue la tangente AT à la courbe au point A (fig. 23).

A la limite, par conséquent, le rapport $\Delta y/\Delta x$ qui mesurait la pente de la sécante AP devient la pente de la tangente en A à la courbe.

Ainsi, quand Δx tend vers zéro, le rapport $\Delta y/\Delta x$, bien que son numérateur et son dénominateur tendent l'un et l'autre vers zéro, tend, lui, vers une valeur bien définie qui est la pente de la tangente en A .

Nous aboutissons donc à cette conclusion fondamentale : la vraie valeur du taux de croissance de la fonction $y = f(x)$ au point A , représentée par la valeur limite vers laquelle tend le rapport $\Delta y/\Delta x$ quand Δx tend vers zéro, n'est autre que la pente de la tangente à la courbe au point A . Nous l'appellerons la valeur dérivée de y correspondant à l'abscisse x_a du point A .

La valeur dérivée ou, plus brièvement, « la dérivée » de la fonction $y = f(x)$ pour la valeur de x correspondant à l'abscisse du point A a donc pour mesure la pente de la tangente à la courbe au point A , c'est-à-dire, par définition, la pente de la courbe au point A .

(1) Ceci n'est vrai que si la fonction est « continue » au point A , et c'est ce qui définit plus précisément, la continuité d'une fonction en un point. Une fonction est alors dite continue dans un intervalle lorsqu'elle est continue en tout point de cet intervalle.

La dérivée considérée comme une fonction de x

Il résulte des considérations précédentes que la notion de dérivée est, comme précédemment la pente, une notion « ponctuelle » : elle n'indique une valeur que si l'on a choisi un point (le point A caractérisé par son abscisse x_a) pour la définir en ce point. Mais nous allons voir qu'elle va nous apporter des renseignements précieux sur le devenir de la fonction au-delà de ce point.

Supposons en effet que le point A se déplace sur la courbe $y = f(x)$. La pente de la tangente en A va varier avec chaque position du point A (fig. 24). La valeur de cette pente dépend donc de la position du point A , donc de x .

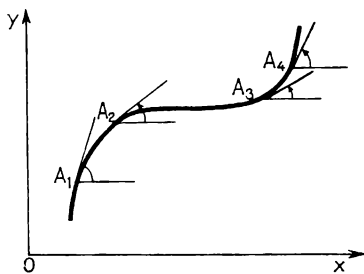


FIG. 24.

A chaque valeur de l'abscisse x correspond ainsi une certaine valeur de la pente de la tangente en A , c'est-à-dire de la valeur dérivée de y en ce point : *la valeur dérivée de y est donc aussi une fonction de x* . Cette nouvelle fonction de x est dite *fonction dérivée* (ou plus simplement « dérivée ») de la fonction $y = f(x)$. On la symbolise $y' = f'(x)$. D'après ce que nous venons de voir, elle exprime les variations de la pente en

chaque point de $y = f(x)$ lorsqu'on se déplace au long de cette courbe. La fonction $y = f(x)$ dont elle dérive est dite « fonction primitive ».

Propriétés fondamentales de la dérivée

Elles résultent de la définition même de la dérivée qui assimile celle-ci à la pente au point correspondant de la courbe représentative de $y = f(x)$:

- 1° *Lorsqu'une fonction est constamment croissante dans un intervalle, sa dérivée est toujours positive dans cet intervalle.*

En effet comme le montre la figure 25, si la fonction est croissante, ce qui, dans le cas de la figure, se traduit par l'allure ascendante du tracé, la tangente en un point P de la courbe pris dans cet intervalle sera située au-dessus de l'horizontale H passant par P .

L'angle α est compté vers le haut : la pente, c'est-à-dire la dérivée de y pour la valeur de x correspondant à l'abscisse de ce point, sera donc positive. Et il en sera de même en tout point de l'intervalle considéré.

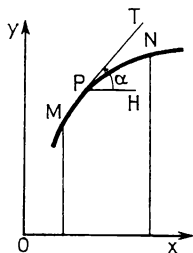


FIG. 25.

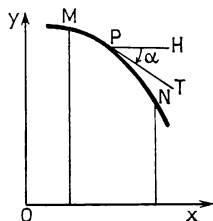


FIG. 26.

2° Si au contraire, une fonction est constamment décroissante dans un intervalle, sa dérivée est toujours négative dans cet intervalle.

En effet, comme le montre la figure 26, si la fonction est décroissante, ce qui se traduit ici par l'allure descendante du tracé, la tangente en un point de la courbe pris dans cet intervalle sera située *au-dessous* de l'horizontale H passant par P . L'angle α est compté vers le bas : la pente, c'est-à-dire la dérivée pour l'abscisse de ce point, sera négative et il en sera de même pour tout point de l'intervalle considéré.

3° Lorsqu'une fonction passe par un maximum ou un minimum, la dérivée s'annule.

En effet, comme on peut le voir sur les figures 27 et 28 la tangente en ce point est horizontale, sa pente est nulle, donc aussi la dérivée en ce point.

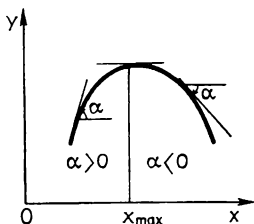


FIG. 27.

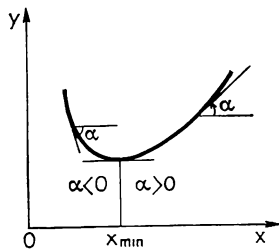


FIG. 28.

- 4° Il résulte des données précédentes que quand la fonction passe par un *maximum*, la dérivée s'annule en passant du $+$ au $-$ (fig. 27), alors qu'elle s'annule *en passant de $-$ à $+$* quand la fonction passe par un *minimum* (fig. 28).

Application à l'étude des fonctions

On montre que ces propriétés de la dérivée que nous venons de vérifier, sinon de démontrer rigoureusement, dans les cas particuliers et favorables des figures 25 à 28, ont une portée très générale et que, réciproquement, si la dérivée d'une fonction est toujours positive dans un intervalle, cette fonction est croissante dans cet intervalle ; si la dérivée est toujours négative dans un intervalle, la fonction décroît dans cet intervalle. Si la dérivée s'annule pour une valeur donnée de la variable, la fonction passe alors par un maximum ou un minimum.

On devine tout le parti que l'on peut tirer de ces propriétés pour préciser l'allure générale de la courbe représentative d'une fonction.

Dérivée et courbure des courbes

Mais la dérivée renseigne également sur la courbure de la courbe représentative.

Soit en effet une courbe $y = f(x)$, que nous supposons par exemple croissante dans l'intervalle considéré AB (fig. 29). Cela veut dire qu'entre A et B , la pente, donc la dérivée, reste toujours positive. Mais l'on voit que si la courbe est concave vers le haut (fig. 29) la pente, tout en restant positive,

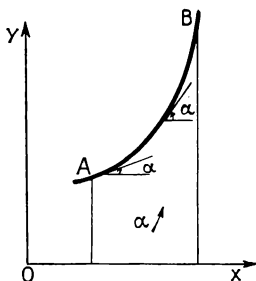


FIG. 29.

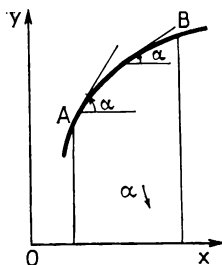


FIG. 30.

ira en augmentant de A vers B , ce qui veut dire que la dérivée croît dans cet intervalle.

Au contraire, si la courbe est concave vers le bas (fig. 30), la pente, tout en étant toujours positive, ira en diminuant de A vers B , ce qui veut dire que la dérivée décroît dans cet intervalle.

On peut en déduire que lorsque la dérivée croît (par valeurs positives), la fonction décrit une courbe à *concavité supérieure*, et inversement, quand la dérivée décroît, en restant toujours positive, la fonction décrit une courbe à *concavité inférieure*.

Si une courbe (que nous supposons encore continue dans l'intervalle étudié AB) présente d'abord une concavité vers le haut, puis une concavité vers le bas (fig. 31), la pente, donc la dérivée, ira d'abord en augmentant pendant la première partie de la courbe, puis en diminuant pendant la deuxième partie. Il y a donc forcément un point où la pente, donc la dérivée,

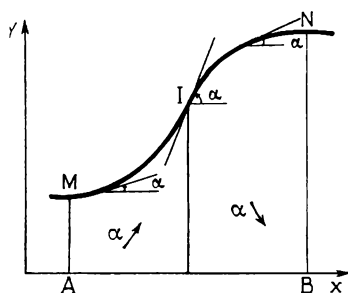


FIG. 31.

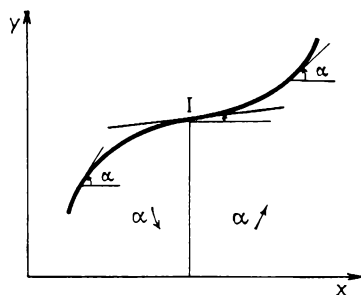


FIG. 32.

passera par un maximum. Ce point, qui correspond à un changement de courbure de la courbe constitue ce qu'on appelle un *point d'inflexion*. A ce niveau, la courbe « traverse » sa tangente (fig. 31). Un maximum de la dérivée correspond donc à un point d'inflexion sur la primitive.

Bien entendu, si l'on avait pris pour exemple une courbe d'abord concave vers le bas, puis vers le haut (fig. 32), on aurait abouti à des conclusions inverses quant aux relations de la dérivée avec la courbure de la primitive, le point d'inflexion de celle-ci correspondant alors à un minimum de la dérivée (fig. 32).

On voit par ces quelques exemples, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, toute la richesse des renseignements que la connaissance de la

dérivée est susceptible de fournir pour l'étude des fonctions, comme nous aurons du reste souvent l'occasion de le vérifier dans le cours de cet ouvrage.

Notation différentielle

La dérivée, nous l'avons vu, peut être considérée comme la limite du rapport $\Delta y/\Delta x$ quand Δx tend vers zéro.

Δy et Δx , qui sont des quantités petites, mais finies, s'appellent des « accroissements ». Quand Δy et Δx deviennent infiniment petits et qu'alors le rapport $\Delta y/\Delta x$ se confond avec sa limite y' , on ne parle plus d'accroissements, mais de différentielles (par allusion à une « différence » aussi petite que l'on voudra entre deux valeurs), qu'on écrit dy (différentielle de y) et dx (différentielle de x).

On peut donc dire qu'à la limite, on a

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ (}^1\text{)}.$$

Telle est la notation dite « différentielle » de la dérivée, due à Leibniz, la notation y' étant celle de Lagrange.

La notation différentielle présente l'avantage de préciser par rapport à quoi est prise la dérivée, ce qu'implique le dénominateur dx , dy/dx voulant dire « dérivée de y par rapport à x ».

Interprétation géométrique de la différentielle

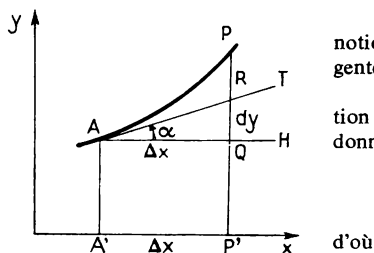


FIG. 33.

Reprenons la figure qui nous a servi à définir la notion de dérivée (fig. 33). Soit R le point où la tangente AT rencontre l'ordonnée PP' .

La pente de la tangente AT (qui est par définition la valeur de la dérivée au point A , soit y') est donnée par le rapport RQ/AQ

$$y' = \frac{RQ}{AQ} = \frac{RQ}{\Delta x}$$

d'où

$$RQ = y' \cdot \Delta x.$$

(¹) De cette relation on tire $dy = y' \cdot dx$: la différentielle de la fonction est égale au produit de la dérivée y' par la différentielle dx de la variable.

Quand Δx tend vers zéro, l'accroissement Δx devient infiniment petit dx et l'on a alors

$$RQ = y' \cdot dx = \text{par définition, } dy.$$

RQ a donc la signification géométrique de la différentielle dy .

Lorsque Δx tend vers zéro, R et P se rapprochent l'un de l'autre, RQ , c'est-à-dire dy , tend alors à se confondre avec PQ qui n'est autre que l'accroissement Δy (on dit que la différentielle dy représente « la partie principale » de l'accroissement Δy). A la limite, Δy est donc devenu dy et l'on a bien à ce moment

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

CHAPITRE III

NOTIONS SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES

A partir de la relation $y = f(x)$ qui caractérise une fonction, on peut établir la relation $y' = f'(x)$ qui caractérise sa dérivée : c'est ce qui s'appelle calculer la dérivée.

Le **principe général** de ce calcul s'appuie sur la définition même de la dérivée :

1° On donne à x un accroissement Δx ;

2° On calcule l'accroissement correspondant Δy de la fonction ;

3° On forme le rapport $\Delta y/\Delta x$ et on recherche la limite de ce rapport quand Δx tend vers zéro. Cette limite, si elle existe ⁽¹⁾, est par définition la dérivée cherchée.

En pratique on remplace x par $(x + \Delta x)$ dans la relation $y = f(x)$. La fonction y prend alors un accroissement Δy et l'on peut écrire

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

relation qui permet de calculer Δy . On divise ensuite par x de manière à faire apparaître le rapport $\Delta y/\Delta x$ et on recherche ce que devient cette expression lorsque l'on fait tendre Δx vers zéro.

A titre d'exemple, calculons la dérivée de $y = x^2$:

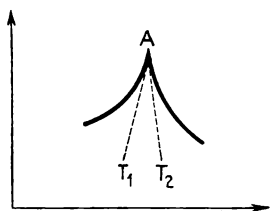


FIG. 34.

⁽¹⁾ Il peut arriver en effet que la dérivée ne soit pas définie pour certaines valeurs de la variable. Il en est ainsi notamment lorsque la courbe présente des points dits « singuliers », tels qu'un point dit « de rebroussement », au niveau duquel la tangente à la courbe n'est pas définie avec précision (fig. 34). Pour qu'une fonction soit dérivable sur un intervalle, il faut donc non seulement qu'elle soit continue en tout point de cet intervalle, mais encore qu'elle ne présente pas dans cet intervalle de points singuliers. Nous supposons cette condition réalisée pour les fonctions étudiées dans le cadre de cet ouvrage.

On remplace x par $(x + \Delta x)$, la fonction devient

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Mais x^2 , c'est y . On a donc

$$y + \Delta y = y + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

On en tire

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Divisons par Δx , on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Si on fait tendre Δx vers zéro, on voit que le second membre de cette équation tend vers $2x$.

Nous dirons donc que la dérivée de la fonction $y = x^2$, est la fonction $y' = 2x$ ⁽¹⁾ ou encore, plus brièvement, que la dérivée de x^2 est $2x$.

Dérivées élémentaires

Nous énoncerons dans ce paragraphe les résultats obtenus pour les dérivées de fonctions élémentaires.

1° La dérivée d'une constante est nulle. — En effet, si y ne varie pas, sa croissance est évidemment nulle et, par suite, son « taux de croissance ».

Il en résulte que *si deux fonctions ne diffèrent que par une constante, elles admettent la même dérivée* : si, en effet, $y = f(x)$ admet pour dérivée $y' = f'(x)$, la fonction $y_1 = f(x) + C$ (C étant une constante) admettra pour dérivée $y' + 0$, c'est-à-dire aussi y' .

2° La dérivée de x est 1. — En effet, si $y = x$, on aura $\Delta y = \Delta x$, donc $\Delta y / \Delta x = 1$, et reste égal à 1 à la limite. La dérivée de $y = x$ (ou, plus brièvement, la dérivée de x) est donc égale à 1.

3° Dérivée d'une puissance de x . — Nous avons vu que la dérivée de x^2 est $2x$. On démontre de la même façon que la dérivée de x^3 est $3x^2$, que

(1) En notation différentielle on écrirait

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \quad \text{ou} \quad d(x^2) = 2x \cdot dx.$$

la dérivée de x^4 est $4x^3$, etc. et de manière générale que la dérivée de x^n est nx^{n-1}

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Pour dériver une puissance de x il suffit donc d'abaisser l'exposant de une unité et de multiplier par l'ancien exposant.

4° On montre que la règle ci-dessus est valable également pour les exposants négatifs ou fractionnaires (1).

C'est ainsi que la dérivée de $1/x$, c'est-à-dire x^{-1} sera $-1 \cdot x^{(-1-1)}$ c'est-à-dire $-1 \cdot x^{-2}$, c'est-à-dire $-(1/x^2)$.

De même, la dérivée de $\sqrt{x}$ par exemple, c'est-à-dire $x^{\frac{1}{2}}$, sera, par application de la règle précédente :

$$\frac{1}{2} \cdot x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Facteur constant

Multiplions la fonction y par un facteur constant k .

Cela veut dire que chaque ordonnée de $y = f(x)$ est multipliée par k .

Donc Δy sera également multiplié par k . Mais Δx reste inchangé. Par suite, le rapport $\Delta y/\Delta x$, qui devient $(k \cdot \Delta y)/\Delta x$, se trouvera multiplié par k .

Si donc *un facteur constant multiplie la fonction, il multiplie également la dérivée.*

Ainsi, sachant que la dérivée de x^3 est $3x^2$, la dérivée de ax^3 sera $3ax^2$.

De manière générale, si l'on connaît la dérivée y' d'une fonction $y = f(x)$ on pourra calculer facilement la dérivée de la fonction ky qui sera ky' .

Dérivée d'une somme

Soit par exemple la fonction $y = 3x^2 + 2x + 4$.

Elle est constituée par une somme de fonctions que nous savons dériver.

(1) En ce qui concerne ces notions cf. *Rappels et Compléments*, pp. 213 et 215.

Il est intuitif que la croissance de chaque terme se répercutera sur la croissance totale de la fonction. On montre qu'il en est bien ainsi en effet et que la dérivée de cette somme est bien égale à la somme des dérivées de chacun de ses termes.

On aura donc

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2)' + (2x)' + (4)' \\ &= 6x + 2 + 0 \end{aligned}$$

et de manière générale, si

$$y = U + V + W,$$

$$y' = U' + V' + W'.$$

Dérivée d'un produit

Il ne s'agit pas d'un produit tel que $3ax^2$ par exemple, déjà étudié, (facteur constant) mais d'un *produit de deux fonctions* tel que

$$(2x + 1)(x^2 + 3) \text{ par exemple.}$$

La fonction y à dériver est donc de la forme

$$y = U \cdot V$$

où U et V sont des fonctions de x .

Soit U' et V' les dérivées de U et de V *par rapport à x* .

On montre que la dérivée du produit $U \cdot V$ *par rapport à x* vaut

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Par conséquent, pour dériver un produit $U \cdot V$

- on dérive chaque facteur,
- on multiplie chaque facteur par la dérivée de l'autre,
- et on fait la somme des produits obtenus.

Ainsi, pour l'exemple cité au début de ce paragraphe

$$U = 2x + 1, \quad \text{d'où } U' = 2$$

$$V = x^2 + 3, \quad \text{d'où } V' = 2x$$

d'où

$$\begin{aligned} y' &= U' \cdot V + U \cdot V' \\ &= 2 \cdot (x^2 + 3) + (2x + 1) \cdot 2x = 6x^2 + 2x + 6. \end{aligned}$$

Dérivée d'un quotient

Il s'agit du *quotient de deux fonctions*, soit U/V .

On montre que la dérivée est alors égale à

$$\frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}.$$

Exemple. — Soit à dériver

$$y = \frac{x+2}{2x}.$$

On a

$$x+2 = U, \quad \text{d'où} \quad U' = 1;$$

$$2x = V, \quad \text{d'où} \quad V' = 2$$

d'où

$$y' = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{1 \cdot 2x - (x+2) \cdot 2}{4x^2} = \frac{-4}{4x^2} = \frac{-1}{x^2}.$$

Fonction de fonction

Il s'agit d'un artifice souvent utilisé dans le calcul des dérivées. Soit à calculer par exemple la dérivée de $y = (x^2 + 3)^2$.

On pourrait la calculer directement, par exemple en développant le carré et en dérivant chaque terme du polynôme ainsi obtenu. Mais dans certains cas ce calcul direct serait très complexe.

L'artifice consiste à poser $(x^2 + 3) = U$. La fonction devient alors $y = U^2$, qui est une fonction de U . Mais comme U est lui-même une fonction de x , on dit que y est une *fonction de fonction* de x .

Dès lors, il est facile de calculer la dérivée de y , c'est-à-dire ici U^2 , *par rapport à U* , soit y'_u , qui est ici $2U$, c'est-à-dire $2(x^2 + 3)$.

Il est également facile de calculer la dérivée de U , c'est-à-dire de $(x^2 + 3)$, par rapport à x , soit U'_x , qui est ici $2x$.

On montre que la dérivée cherchée, c'est-à-dire la dérivée de y par rapport à x , soit y'_x , est égale au produit de ces deux dérivées :

$$y'_x = y'_U \cdot U'_x \quad (1)$$

ce qui donne ici

$$2(x^2 + 3) \times 2x = 4x(x^2 + 3).$$

Fonctions inverses

Dans la fonction inverse, nous l'avons vu, y est remplacé par x et réciproquement. Δy devient donc Δx , et réciproquement.

Si donc $y = f(x)$ admettait pour dérivée la limite du rapport $\Delta y / \Delta x$, la fonction inverse admettra pour dérivée la limite du rapport $\Delta x / \Delta y$, c'est-à-dire l'inverse de y' , soit $1/y'$:

Les dérivées de deux fonctions « inverses » ont donc des valeurs numériques inverses.

Si donc on connaît la dérivée y' d'une fonction $y = f(x)$, on obtiendra facilement la dérivée de la fonction inverse $x = \varphi(y)$ en inversant la dérivée y' , ce qui donne $1/y'$.

Mais il ne faudra pas oublier de rétablir la désignation usuelle des axes en remplaçant dans cette expression x par y .

Exemple. — Soit la fonction $y = x^2$. Pour obtenir sa fonction inverse, il faut exprimer x en fonction de y , ce qui donne $x^2 = y$, c'est-à-dire $x = \sqrt{y}$.

(1) En effet, en notation différentielle,

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

En multipliant en haut et en bas par dU , on a :

$$y'_x = \frac{dx}{dU} \cdot \frac{dU}{dx}$$

c'est-à-dire

$$y'_x = y'_U \cdot U'_x.$$

Pour sacrifier à l'usage selon lequel on appelle y la fonction et x la variable, il faut remplacer dans cette expression x par y et réciproquement y par x , ce qui donne $y = \sqrt{x}$, qui est donc la fonction inverse de $y = x^2$.

Pour obtenir la dérivée de $y = x$ il suffit donc d'inverser la dérivée de $y = x^2$, soit $2x$, ce qui donne $1/2x$, mais il faut également remplacer dans cette expression x par y , ce qui donne $1/2y$, c'est-à-dire $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

La dérivée de $y = \sqrt{x}$ est donc $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ comme nous le savions déjà d'après la règle de dérivation des puissances.

Dérivée seconde

Comme la fonction $y = f(x)$ dont elle dérive, la fonction dérivée a une courbe représentative $y' = f'(x)$.

A partir de la courbe $y' = f'(x)$, on peut en général obtenir par dérivation une autre fonction. Cette nouvelle fonction, qui est la dérivée de la dérivée, est dite « dérivée seconde » de la fonction primitive et on l'écrit $y'' = f''(x)$ ou encore, en notation différentielle,

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ce qui ne signifie nullement que les différentielles sont portées au carré, mais simplement qu'on a dérivé y pour la deuxième fois par rapport à x .

La dérivée seconde a bien entendu les mêmes propriétés par rapport à la dérivée première que celle-ci par rapport à la fonction primitive.

C'est ainsi (fig. 35) que lorsque la dérivée première est croissante, ce qui correspond, nous l'avons vu, à une concavité vers le haut sur la primitive, la dérivée seconde est

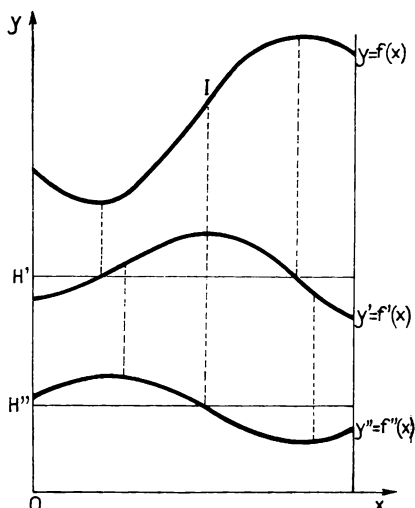


FIG. 35.

positive. Lorsque la dérivée première décroît, ce qui correspond à une concavité de la primitive vers le bas, la dérivée seconde est négative. Enfin, lorsque la dérivée première passe par un maximum (ou un minimum), la dérivée seconde s'annule. A ce niveau la primitive, dont la pente cesse de croître pour décroître (ou inversement) présente un point d'inflexion (fig. 35).

Toutes ces propriétés de la dérivée seconde peuvent être exploitées, bien entendu, comme nous en verrons du reste des exemples, pour déterminer avec plus de précision le tracé d'une courbe représentative.

Dérivées successives

La dérivée seconde peut elle-même admettre une dérivée qui est dite dérivée troisième ou encore « d'ordre 3 », et ainsi de suite : on peut généraliser et définir une *dérivée d'ordre p* qui est obtenue en dérivant p fois la fonction primitive.

En général, au-delà d'un certain ordre, la dérivée correspondante n'existe plus. On dit alors que la fonction est « *dérivable* jusqu'à l'ordre n » ou encore qu'elle est « n fois dérivable ».

Soit par exemple la fonction

$$y = ax^2 + bx + c.$$

On a :

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$

$$y''' = 0.$$

La fonction n'est plus dérivable au-delà de l'ordre 3.

Certaines fonctions, en revanche, peuvent être dérivées indéfiniment : on dit qu'elles sont « *indéfiniment dérivables* ». Il en est ainsi par exemple, nous le verrons, de la fonction $y = \sin x$.

Ces fonctions indéfiniment dérivables peuvent être « *approchées* », c'est-à-dire calculées avec une bonne approximation par une formule dite « *Formule de Maclaurin* » dont les mathématiciens font grand cas mais qui n'a pour nous qu'un intérêt relatif. Aussi nous contenterons-nous de l'envisager dans les compléments placés à la fin de cet ouvrage (cf. *Rappels et Compléments* p. 223).

CHAPITRE IV

FONCTIONS ALGÈBRIQUES SIMPLES

On appelle ainsi les fonctions dans lesquelles on peut calculer y en faisant subir à x les seules opérations de l'algèbre : addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance, extraction de racine ⁽¹⁾.

Fonction $y = ax$

Dans cette fonction, l'ordonnée y est directement proportionnelle à l'abscisse x , le facteur constant a indiquant le coefficient de proportionnalité.

La courbe représentative de cette fonction (fig. 36) est, on le sait, une droite D passant par l'origine des coordonnées (pour $x = 0$, $y = 0$) et par le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée a (pour $x = 1$, $y = a$).

Pour tout point M de cette droite en effet, on a :

$$\frac{MM'}{OM'} = \frac{AA'}{OA'}, \text{ c'est-à-dire } \frac{y}{x} = \frac{a}{1}, \text{ soit } y = ax.$$

Cette droite a pour pente

$$\frac{MM'}{OM'} = \frac{y}{x} = a.$$

Le coefficient constant a qui exprime la pente de la droite D est le *coefficient angulaire* de la droite D . D'après ce que nous avons vu des rapports de la pente et de la dérivée, ce coefficient représente donc la dérivée de la fonction $y = ax$ ⁽²⁾. Cette fonction offre ainsi la particularité remarquable d'avoir une dérivée constante quelle que soit la valeur de x .

(1) Lorsqu'une fonction contient des expressions plus complexes, telles que des logarithmes, des lignes trigonométriques, etc. elle est dite « transcendante ».

(2) Le calcul indique du reste que la dérivée de ax est $a \times 1 = a$.

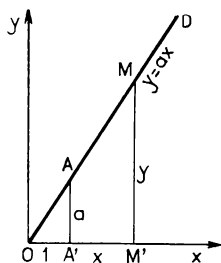


Fig. 36.

En effet la courbe représentative de la fonction $y = ax$ étant une droite, elle a même pente, donc même dérivée, en chacun de ses points.

Conformément aux propriétés générales de la dérivée, le signe de la dérivée va commander le caractère croissant ou décroissant de la fonction :

- si donc a est positif, la fonction sera croissante : la droite $y = ax$ aura une direction ascendante (fig. 37).

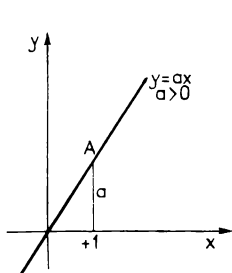


FIG. 37.

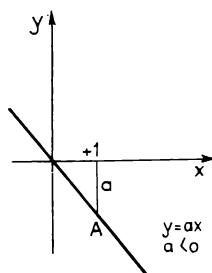


FIG. 38.

- si au contraire a est négatif, la fonction sera décroissante : la droite $y = ax$ aura une direction descendante (fig. 38).

Dans l'un et l'autre cas, la croissance ou la décroissance se fait à un « taux » constant indiqué par le coefficient a .

Fonction $y = ax + b$

C'est la fonction précédente augmentée d'une constante b .

La courbe représentative se déduit donc de la précédente en augmentant chaque ordonnée de la valeur b , ce qui revient à la déplacer parallèlement à elle-même d'une distance b (fig. 39).

La droite obtenue D' coupe l'axe des y au point B , d'ordonnée b , dite « ordonnée à l'origine ».

Elle coupe l'axe des x au point C d'abscisse x_c . Pour cette valeur de x on a $y = 0$, c'est-à-dire $ax_c + b = 0$, d'où $x_c = -b/a$.

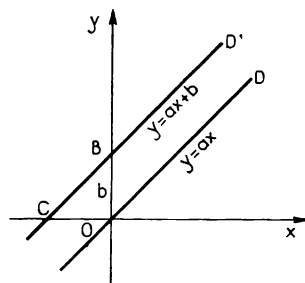


FIG. 39.

La droite D' étant, par construction, parallèle à la droite D , elle a même pente qu'elle, c'est-à-dire a .

La dérivée de $y = ax + b$ est donc aussi a ⁽¹⁾.

Comme la fonction $y = ax$, la fonction $y = ax + b$ est donc croissante ou décroissante suivant que a est positif ou négatif et son « taux de croissance » est aussi constant et égal à a .

Signification de la fonction linéaire

Si on trace un axe vertical passant par C (fig. 40), on retrouve une droite passant par l'origine des coordonnées et dont la forme générale sera par suite du type $Y = aX$.

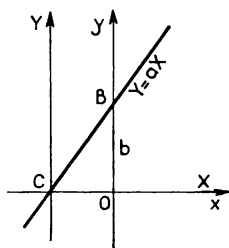


FIG. 40.

Les droites $y = ax$ et $y = ax + b$ se déduisent donc l'une de l'autre par une simple translation d'axes.

Elles sont toutes deux l'expression d'un même type de fonction consistant dans une relation de proportionnalité directe entre la fonction et la variable. Cette relation de proportionnalité s'exprime par une droite, d'où le nom de fonction linéaire donné à ce type de fonction ⁽²⁾.

* Applications des fonctions linéaires. Droite d'étalonnage

De nombreuses lois physiques se traduisent par une loi linéaire : rappelons que dans le mouvement uniforme, l'espace e est une fonction linéaire du temps : $e = Vt$. La vitesse V , coefficient de proportionnalité, est donc la dérivée de l'espace par rapport au temps. Elle exprime bien en effet l'accroissement de l'espace par unité de temps, c'est-à-dire « le taux d'accroissement » de l'espace.

De même, la différence de potentiel E aux bornes d'un générateur est une

(1) Ce résultat ne saurait nous surprendre car les fonctions $y = ax$ et $y = ax + b$ ne diffèrent que par une constante et doivent, par suite, admettre la même dérivée.

(2) On tend aujourd'hui à réserver le nom de fonction linéaire à la fonction $y = ax$, la fonction $y = ax + b$ étant appelée « fonction affine ».

fonction linéaire de l'intensité I : $E = RI$; la longueur l d'une barre de fer est une fonction linéaire de la température t : $l = l_0 (1 + \alpha t)$, etc.

En biologie, on rencontre également, quoique beaucoup plus rarement, des fonctions linéaires. C'est ainsi que dans une zone convenable de longueur d'onde, la densité optique d'une solution est une fonction linéaire de la concentration de la substance dissoute. La courbe représentative de la densité optique d en fonction de la concentration C est alors une droite, dite « droite d'étalonnage » (fig. 41) répondant à l'équation

$$d = aC + b.$$

La constante b , ordonnée à l'origine, représente la densité optique du « témoin », c'est-à-dire l'ensemble des réactifs utilisés, sauf le composé à doser, qui est remplacé par un égal volume d'eau.

Dans la photométrie dite « d'extinction », on s'arrange pour éliminer l'absorption propre du « témoin ». La droite d'étalonnage est alors une droite de la forme $d = aC$, passant par l'origine O (fig. 42).

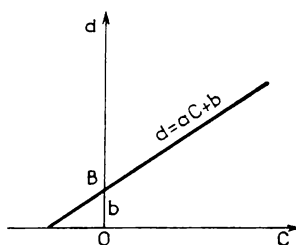


FIG. 41.

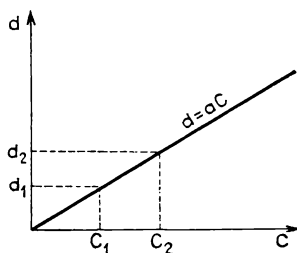


FIG. 42.

Quelle que soit sa forme, la droite d'étalonnage une fois établie avec des concentrations connues de substance, on l'utilise ensuite pour en déduire les concentrations inconnues C_1 , C_2 , etc. correspondant aux densités optiques trouvées d_1 , d_2 , etc. (fig. 42).

Mais l'intérêt majeur de la fonction linéaire réside en fait dans la possibilité de ramener, grâce à une transformation appropriée, la plupart des autres fonctions sous la forme d'une fonction linéaire.

Comme il suffit de connaître deux points d'une droite pour pouvoir la tracer, on conçoit combien cette transformation dite « anamorphose linéaire » peut faciliter l'étude des fonctions plus complexes, comme nous le verrons sur de nombreux exemples.

Fonction $y = ax^2$

Ici, y est proportionnel, non plus à l'abscisse x , mais au carré de celle-ci, et la courbe représentative ne sera plus une droite.

Elle passe toujours par l'origine des coordonnées (pour $x = 0$, $y = 0$) et par le point A (pour $x = 1$, $y = a$).

Mais si l'on donne à x des valeurs supérieures à 1, telles que 2, 3, 4, etc. y augmente comme le carré, c'est-à-dire 4, 9, 16, etc. : la courbe s'élève donc rapidement à mesure qu'on s'éloigne sur l'axe des x .

Par ailleurs, si on change x en $-x$, on obtient pour $y = x^2$ la même valeur. La fonction $y = x^2$ ayant même valeur pour deux valeurs de x égales et de signe contraire, on en déduit que sa courbe représentative admet Oy comme axe de symétrie. C'est, on le sait, une parabole verticale de sommet O et passant par le point A précité (fig. 43).

À titre d'exemple des possibilités offertes par la dérivée pour l'étude d'une courbe représentative, nous allons préciser l'allure de cette courbe à l'aide de sa dérivée : Celle-ci est

$$y' = a \times 2x = 2ax.$$

L'équation de la dérivée montre que, a étant supposé positif, la dérivée $y' = 2ax$ aura le signe de x . Elle sera donc négative pour les valeurs négatives de x , c'est-à-dire à gauche de l'axe des y . Dans cette zone par conséquent la fonction est décroissante, comme en témoigne du reste l'allure descendante du tracé. Pour les valeurs positives de x , en revanche c'est-à-dire à droite de l'axe des y , la dérivée sera positive et la fonction est alors croissante, comme en témoigne l'allure ascendante du tracé de la parabole dans cette zone (fig. 43).

Pour $x = 0$, la dérivée s'annule en passant de $-$ à $+$, la fonction présente donc à ce niveau un minimum et la tangente à la courbe en ce point est horizontale : c'est l'axe des x .

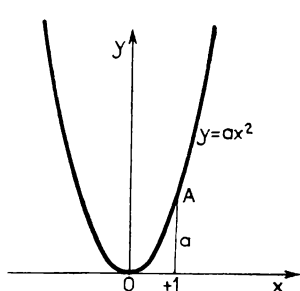


FIG. 43.

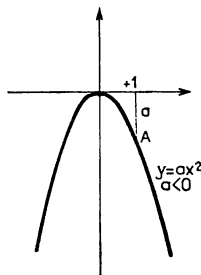


FIG. 43bis.

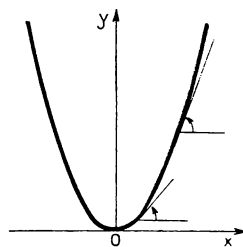


FIG. 44.

Si a est négatif, la dérivée est du signe contraire de x , donc positive à gauche et négative à droite de l'axe des y . La fonction est alors d'abord croissante puis décroissante : la parabole tourne alors sa concavité vers le bas et présente en O un maximum (fig. 43bis).

Quel que soit le signe de a , l'expression de la dérivée montre qu'elle est directement proportionnelle à l'abscisse x . Il en résulte qu'à mesure qu'on s'éloigne de part et d'autre du point O , la dérivée, donc la pente, nulle pour le point O , augmente ensuite d'autant plus qu'on s'écarte davantage de ce point. Par suite, la tangente à la courbe, horizontale au niveau du point O , se relève rapidement à mesure qu'on s'écarte du point O , et ce d'autant plus qu'on s'éloigne davantage sur l'axe des x , pour devenir presque verticale pour les grandes valeurs de x , ce qui rend bien compte de l'allure de la courbe (fig. 44).

Fonction $y = ax^3$

Ici, y est proportionnel à la troisième puissance de x (fonction du troisième degré en x).

La courbe passe toujours par l'origine des coordonnées et par le point A . Mais pour les valeurs de x supérieures à 1, $y = ax^3$ croît comme le cube de x , donc encore plus rapidement que ne le faisait la fonction $y = ax^2$.

Par ailleurs pour les valeurs négatives de x (a étant supposé > 0), l'élévation au cube fait retrouver le signe $-$, y est donc alors négatif : la courbe

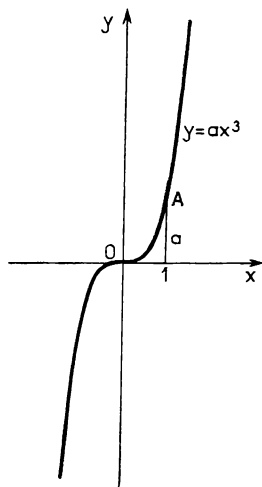


FIG. 45.

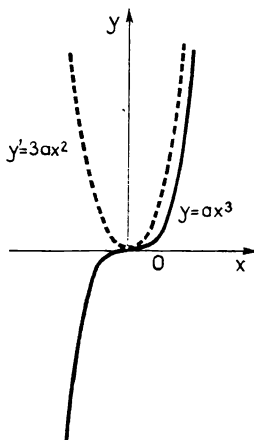


FIG. 46.

comportera donc pour les valeurs négatives de x une deuxième branche symétrique de la première par rapport au point O (fig. 45).

La dérivée de cette fonction est $3ax^2$. — Sa courbe représentative est donc une parabole à concavité tournée vers le haut si a est >0 . Dans ces conditions, elle est toujours positive et la fonction $y = ax^3$ est par suite toujours croissante, comme on peut le vérifier (fig. 46), quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

La dérivée seconde est $3a \times 2x = 6ax$. — Elle s'annule pour $x = 0$, valeur pour laquelle $y = 0$. Le point correspondant est l'origine des coordonnées qui correspond ici à un minimum sur la dérivée première et à un point d'inflexion sur la primitive $y = ax^3$ (fig. 46).

* Loi de Bragg-Pierce

Comme application des fonctions cubiques, citons la loi de Bragg-Pierce qui concerne les variations du coefficient massique d'absorption des rayons X par fluorescence.

Selon cette loi, ce coefficient, symbolisé par la lettre grecque τ , est proportionnel au cube de la longueur d'onde λ du rayonnement :

$$\tau = k_1 \lambda^3.$$

Sa courbe représentative en fonction de λ est donc une courbe du troisième degré du type $y = ax^3$.

Mais ce même coefficient massique est aussi proportionnel au cube du nombre atomique N du corps absorbant, suivant un coefficient de proportionnalité k_2

$$\tau = k_2 N^3.$$

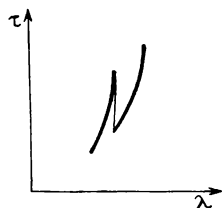


FIG. 47.

Pour certaines valeurs de λ les coefficients de proportionnalité k_1 ou k_2 changent brusquement. On passe alors brusquement d'une courbe du troisième degré à une autre. C'est ce qui explique les « ressauts » que l'on observe sur la courbe représentative de τ en fonction de λ (fig. 47).

Fonction $y = ax^n$

Les notions précédentes peuvent se généraliser au cas des fonctions du type $y = ax^n$ où n est un nombre *entier* et *positif*.

Quelle que soit la valeur de n entier et positif en effet, la fonction

$y = ax^n$ s'annule pour $x = 0$ et est égale à a pour $x = 1$. Sa courbe représentative passe donc dans tous les cas, comme précédemment, par l'origine des coordonnées et par le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée a .

Pour les valeurs paires de n , a étant supposé positif, y reste toujours positif, même pour les valeurs négatives de x : on a donc une courbe du type $y = ax^2$, située tout entière au-dessus de l'axe des x et comportant deux branches symétriques par rapport à Oy (fig. 48).

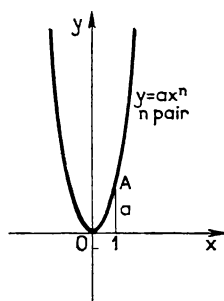


FIG. 48.

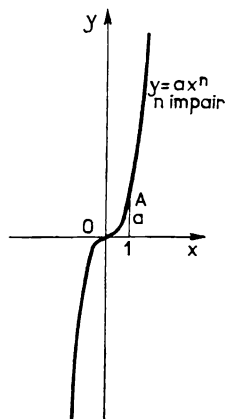


FIG. 49.

Pour les valeurs impaires de n , a étant toujours supposé positif, y devient négatif pour les valeurs négatives de x et l'on a une courbe du type ax^3 avec deux branches symétriques par rapport au point O (fig. 49).

Fonction $y = 1/x$

Cette fonction où y est inversement proportionnel à x , n'est pas définie pour la valeur $x = 0$ qui annule le dénominateur.

Pour $x = 1$, $y = 1$: la fonction passe par le point P de coordonnées $x = y = 1$.

Lorsqu'on donne à x des valeurs croissantes supérieures à 1, y qui est égal à $1/x$ prend des valeurs de plus en plus petites et tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Quand on donne à x des valeurs décroissantes comprises entre 1 et 0,

y prend au contraire des valeurs de plus en plus grandes et tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro.

Donc pour les valeurs $x = +\infty$ et $x = 0$, la courbe se rapproche des

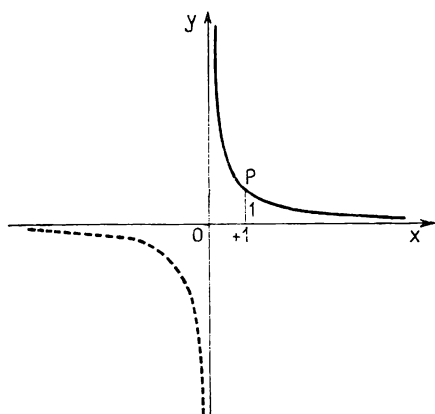


FIG. 50.

axes de coordonnées sans cependant jamais les atteindre : on dit que les axes sont asymptotes à la courbe : la courbe est une hyperbole équilatère admettant les axes Ox et Oy comme asymptotes (fig. 50).

Pour deux valeurs de x égales et de signe contraire, y prend des valeurs égales et de signe contraire : la courbe complète comprend donc une deuxième branche symétrique de la précédente par rapport au point O (en pointillé sur la figure 50) ⁽¹⁾.

A noter également que si l'on a $y = 1/x$, on aura $x = 1/y$: la fonction se confond avec sa « réciproque ». Il en résulte que la courbe admet la première bissectrice comme axe de symétrie.

Fonction $y = a/x$

C'est la courbe précédente dont les ordonnées ont été multipliées par un facteur a que nous supposons positif. Pour construire son graphe il suffira donc de multiplier par a les ordonnées de $y = 1/x$.

La courbe obtenue admet toujours les axes de coordonnées comme asymptotes. Mais elle passe par le point A de coordonnées $x = 1$ et $y = a$ (fig. 51).

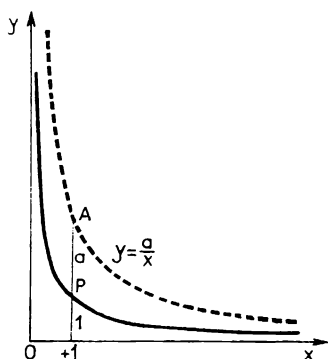


FIG. 51.

⁽¹⁾ Remarquons que pour x voisin de zéro mais négatif, y tend vers $-\infty$, alors que pour x voisin de zéro mais positif y tend vers $+\infty$. Lorsque x passe de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ (ε étant une quantité aussi petite que l'on voudra), y saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$: on dit que la fonction présente une *discontinuité* pour la valeur $x = 0$.

* Chronaxie-loi de Weiss

A la lumière des considérations précédentes, il est facile de comprendre la notion de chronaxie qui joue un rôle si important dans la physiologie du système nerveux.

Dans l'étude de l'excitation électrique des muscles striés par le courant continu, on montre en effet, et c'est ce qui constitue la loi de Weiss, que l'intensité minima i_m du courant électrique nécessaire pour déclencher une contraction musculaire est inversement proportionnelle au temps de passage du courant :

$$i_m = \frac{a}{t} + b$$

La courbe représentative de i_m en fonction du temps t est donc une hyperbole équilatère du type a/x déplacée vers le haut de la quantité b (fig. 52).

L'allure décroissante de la courbe visualise bien le fait que l'intensité minimale nécessaire pour déclencher une contraction est d'autant plus faible que le temps de passage du courant est plus long.

Cependant, en raison du décalage de la courbe vers le haut, on voit que i_m ne s'annule pas, même pour un temps de passage supposé infini, mais tend alors vers b , dont l'ordonnée est asymptote à la courbe ⁽¹⁾.

La quantité b représente donc l'intensité minimale nécessaire pour obtenir une contraction avec un temps de passage supposé infini (en pratique très grand, de l'ordre de la seconde). On l'appelle la *rhéobase*.

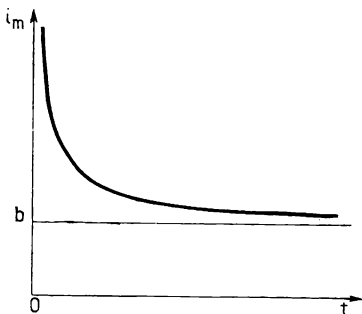


FIG. 52.

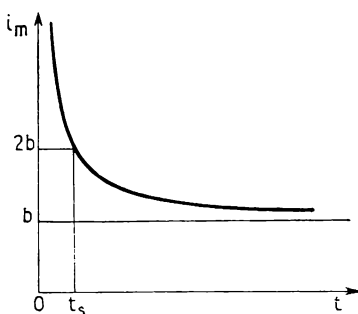


FIG. 53.

(1) L'équation $i_m = a/t + b$ montre du reste que quand $t \rightarrow \infty$, $a/t \rightarrow 0$ et $i_m \rightarrow b$.

Théoriquement, pour construire la courbe il suffit de connaître a et b . Mais si b , comme nous venons de le voir, a une signification précise, il n'en est pas de même de a . Aussi a-t-on été amené à rechercher une autre caractéristique. A cet effet Lapicque a proposé de considérer le temps t_s qui correspond sur la courbe à un courant d'intensité double de la rhéobase (fig. 53). Ce temps, qui représente donc le temps minimum pour obtenir une contraction avec un courant dont l'intensité est le double de la rhéobase définit ce qu'on appelle la *Chronaxie*.

Fonction $y = -a/x$

Cette fonction, où nous supposons encore que a est un facteur positif, est égale en valeur absolue à la fonction $y = a/x$, mais de signe contraire.

Les valeurs de $y = -a/x$ seront donc symétriques de celles de $y = a/x$ par rapport à l'axe des x .

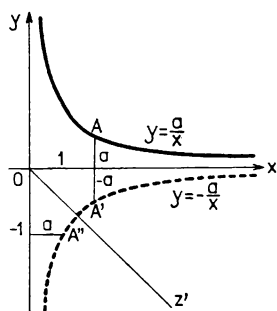


FIG. 54.

Pour construire le graphe de $y = -a/x$, il suffira donc de retourner celui de $y = a/x$ autour de l'axe des x : on obtient ainsi une branche d'hyperbole qui se situe dans le quadrant inférieur droit du plan et qui passe par le point A' , symétrique de A et de coordonnées $x = 1$ et $y = -a$ (fig. 54).

Pour des raisons de symétrie, elle passe également, notons-le, par le point A'' symétrique de A' par rapport à la bissectrice oz' du quadrant inférieur droit et de coordonnées $x = a$, $y = -1$ (fig. 54).

Hyperbole équilatère passant par l'origine des coordonnées

Traçons par A'' deux nouveaux axes de coordonnées $A''X$ et $A''Y$, parallèles respectivement aux axes d'origine Ox et Oy (fig. 55).

Soient X et Y les coordonnées par rapport aux nouveaux axes. On montre que l'équation de l'hyperbole équilatère par rapport à ces nouveaux axes de coordonnées est

$$Y = \frac{X}{X + a}$$

En effet, soit M un point de l'hyperbole, x et y ses coordonnées par rapport aux anciens axes, X et Y ses coordonnées par rapport aux nouveaux axes (fig. 55).

Puisque M appartient à la courbe $y = -a/x$ on peut écrire

$$x \cdot y = -a. \quad (1)$$

Mais la figure montre que

$$x = X + a$$

et

$$y = (-1 + Y) = Y - 1.$$

L'expression (1) devient

$$(X + a)(Y - 1) = -a.$$

C'est-à-dire

$$-X + XY + aY - a = -a.$$

D'où

$$Y(X + a) = X$$

et

$$Y = \frac{X}{X + a}.$$

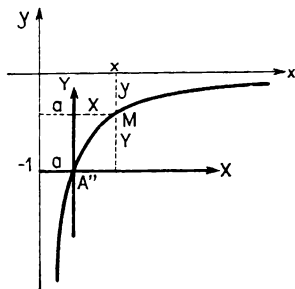


FIG. 55.

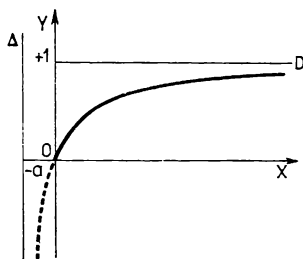


FIG. 56.

Dans ce système d'axes, on le voit, l'hyperbole passe par l'origine des coordonnées et elle admet pour asymptotes l'horizontale d'ordonnée $+1$ et la verticale Δ d'abscisse $-a$ (fig. 56). C'est souvent sous cette forme que se rencontre l'hyperbole dans ses applications biologiques.

* Courbe de saturation de l'hémoglobine

L'étude de la saturation de l'hémoglobine par l'oxygène en offre un exemple particulièrement instructif.

On montre en effet que le pourcentage y d'hémoglobine existant sous

forme d'oxyhémoglobine est fonction de la pression partielle p de l'oxygène suivant la relation

$$y = \frac{p}{p+k}$$

où k est un facteur constant.

La courbe représentative de y en fonction de p est donc une hyperbole passant par l'origine des coordonnées et qui admet pour asymptote horizontale la droite $y = +1$, ce qui correspond à un pourcentage de 100 % d'oxyhémoglobine (fig. 57).

Cette courbe permet de comprendre la fonction respiratoire de l'hémoglobine.

On voit en effet (fig. 57) que pour une pression partielle de O_2 égale à 100 mm de mercure, qui correspond à la pression partielle de O_2 au niveau des poumons, l'hémoglobine est complètement saturée en oxygène et existe en quasi-totalité sous forme d'oxyhémoglobine.

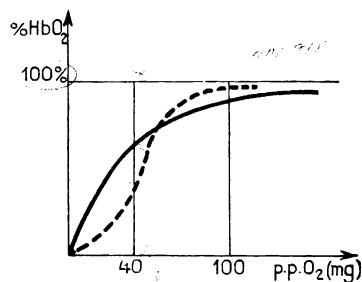


FIG. 57.

Au contraire pour une pression partielle de 40 mm de mercure, qui correspond à la pression partielle de O_2 au niveau des tissus, il n'y a qu'une partie de l'hémoglobine qui est oxydée, le restant se trouvant sous forme réduite Hb (représentée par la portion de l'ordonnée située au-dessus de la courbe) : au fur et à

mesure que la pression partielle diminue, l'hémoglobine libère donc au niveau des tissus l'oxygène dont elle s'est chargée au cours de la traversée pulmonaire, et c'est ce « largage » progressif de l'oxygène qui assure précisément la fonction respiratoire du sang.

Toutefois, la courbe ci-dessus est une courbe théorique, qui correspond à une solution pure d'hémoglobine. La courbe réelle obtenue à partir du sang a un aspect en S qui s'incurve autour de la courbe théorique (courbe en pointillé, fig. 57).

Ces modifications imprimées par le milieu sanguin à la courbe de dissociation de l'hémoglobine ont pour effet de faciliter la fonction respiratoire de l'hémoglobine. On voit en particulier que pour les valeurs basses de la pression partielle de O_2 il existe en réalité une proportion plus faible de HbO_2 que ne l'indiquerait la courbe théorique. L'hémoglobine a donc libéré une quantité d'oxygène plus importante que ne le voudrait la théorie et cela précisément dans les circonstances où cette oxygénation est particulièrement souhaitable.

* Vitesse de réaction enzymatique

On trouve une loi hyperbolique analogue dans l'étude des réactions enzymatiques. On montre en effet que la vitesse V d'une réaction enzymatique est donnée par la formule dite de Michaelis-Menten

$$V = V_m \cdot \frac{S}{S + K}$$

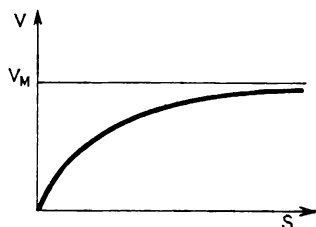
où V_m représente la vitesse maxima atteinte lorsque la totalité de l'enzyme est combinée au substrat, S la concentration du substrat et K une constante, dite « constante de Michaelis » qui caractérise la dissociation du complexe enzyme-substrat.

De la formule de Michaelis-Menten, on tire

$$\frac{V}{V_m} = \frac{S}{S + K}$$

La courbe V/V_m en fonction de S est donc une hyperbole du type $X/(X+k)$ admettant pour asymptote horizontale la droite $V/V_m = 1$, c'est-à-dire correspondant à $V = V_m$ (fig. 58). Elle montre que la vitesse de réaction

FIG. 58. — Représentation graphique de l'équation de Michaelis-Menten $V = f(S)$. (D'après C. BÉNÉZÉCH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^{ie}, 1958.)



enzymatique tend asymptotiquement vers V_m pour les grandes valeurs de S , c'est-à-dire lorsque le substrat est en excès, permettant une combinaison de la totalité de l'enzyme avec le substrat.

* Graphique de Lineweaver-Burk

La formule de Michaelis-Menten peut s'écrire encore

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_m} \cdot \frac{S + K}{S} = \frac{1}{V_m} \left[1 + \frac{K}{S} \right] = \frac{K}{S \cdot V_m} + \frac{1}{V_m}.$$

Ce qui peut encore s'écrire, isolant $1/S$,

$$\frac{1}{V} = \frac{K}{V_m} \left[\frac{1}{S} \right] + \frac{1}{V_m}.$$

La courbe représentative de $1/V$ en fonction de $1/S$ est donc une droite de pente K/V_m et d'ordonnée à l'origine $1/V_m$ (fig. 59).

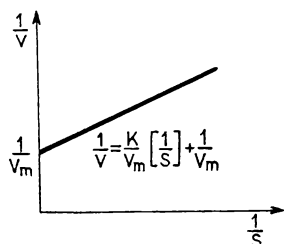


FIG. 59. — *Graphique de Lineweaver et Burk.*
(D'après C. BÉNÉZEC, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^{ie}, 1958.)

La branche d'hyperbole est donc devenue une droite, dite *droite de Lineweaver et Burk*, qui est exploitée en pratique pour la détermination graphique de la constante de Michaelis.

Fonction $y = \sqrt{x}$ et $y = \sqrt[n]{x}$

La fonction $y = \sqrt{x}$, nous l'avons vu, est la « réciproque » de la fonction $y = x^2$ dont la courbe représentative, nous le savons, est une parabole à axe vertical.

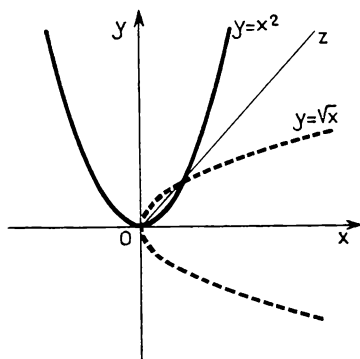


FIG. 60.

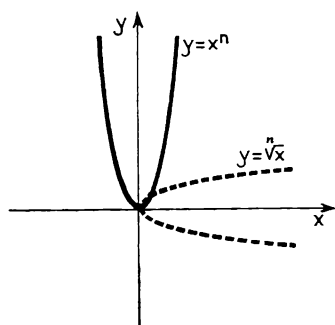


FIG. 61.

Pour tracer la courbe représentative de $y = \sqrt{x}$, il suffira donc de retourner celle de $y = x^2$ autour de la bissectrice Oz de l'angle xOy : on obtient une parabole à axe horizontal qui comporte une branche positive et une branche négative correspondant respectivement à $+\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$ (fig. 60).

On obtiendra de façon analogue les courbes représentatives des fonctions du type $y = \sqrt[n]{x}$ où n est un entier positif.

En effet, si $y = \sqrt[n]{x}$, on a $y^n = x$, c'est-à-dire $x = y^n$.

Ces fonctions sont donc respectivement les fonctions inverses des fonctions $y = x^n$ que nous avons étudiées. Leurs courbes représentatives se déduiront donc également de ces dernières par simple échange d'axes (fig. 61).

* Isothermes de Freundlich

Lorsqu'on étudie l'adsorption d'une substance en solution à la surface d'un corps adsorbant, on constate que la quantité de substance dissoute A adsorbée par unité de surface du corps adsorbant est proportionnelle à la racine n^e de la concentration C de la substance dissoute : c'est ce qu'exprime la formule de Freundlich

$$A = K \sqrt[n]{C}$$

où K et n sont des constantes dépendant du corps adsorbant et de la substance dissoute.

Pour un corps adsorbant et une substance dissoute donnés, la courbe représentative de la quantité de substance adsorbée A en fonction de la concentration C de cette substance dans la solution, courbe dite « isotherme de Freundlich » (car le phénomène est également influencé par la tempéra-

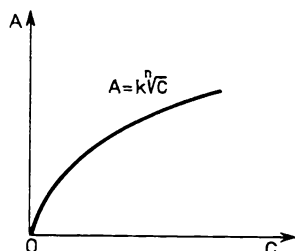


FIG. 62. — *Isotherme de Freundlich.* (D'après C. BÉNEZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^{ie}, 1958.)

ture, et la courbe doit être tracée pour chaque niveau de température) est une courbe du type $\sqrt[n]{x}$ que nous venons d'étudier (fig. 62).

Elle montre que la quantité de substance adsorbée augmente rapidement pour les valeurs faibles de la concentration et ensuite beaucoup plus lentement dès que la concentration atteint une certaine valeur dans la solution (fig. 62).

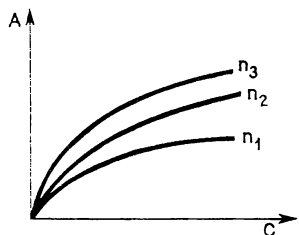


FIG. 63.

A chaque valeur de n correspond évidemment une courbe différente. Si donc la solution étudiée comporte plusieurs substances dissoutes auxquelles correspondent respectivement des valeurs différentes de n , les quantités adsorbées par un même adsorbant différeront plus ou moins pour chacune des substances en solution (fig. 63). En se plaçant dans des conditions convenables, il est donc possible de réaliser une *adsorption sélective* qui peut être exploitée pour

séparer les divers constituants d'un mélange. Tel est le principe de la *chromatographie par adsorption*, méthode d'analyse physico-chimique qui a pris ces dernières années, particulièrement en biologie et en médecine, une extension considérable.

Signification générale : fonction puissance de x

Il n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage de passer en revue toutes les fonctions algébriques et nous avons retenu seulement quelques-unes d'entre elles, celles qui sont susceptibles d'intéresser plus particulièrement le biologiste (¹).

(¹) Nous avons notamment laissé volontairement de côté les fonctions

$$y = ax^2 + bx + c$$

(trinôme du second degré) et

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

(fonction homographique) dont l'intérêt est très réduit pour le biologiste. Ces fonctions qui font par ailleurs l'objet de longs développements dans les Lycées peuvent du reste être ramenées à un des types ci-dessus par un changement convenable d'axes de coordonnées.

Il paraît cependant possible, au terme de ce tour d'horizon, de dégager la signification générale des fonctions que nous avons étudiées dans ce chapitre.

Rappelons à cet effet que x peut être considéré comme la première puissance de x : $x = x^1$, que $1/x$ n'est autre que x^{-1} et que, de manière générale, $1/x^n$ correspond à x^{-n} , que $\sqrt{x}$ peut s'écrire $x^{1/2}$ et $\sqrt[n]{x}$, $x^{1/n}$ (cf. Rappels p. 211).

On voit dans ces conditions que les fonctions étudiées dans ce chapitre répondent à la formule générale

$$y = ax^n$$

où n peut être positif, négatif, entier ou fractionnaire.

Il apparaît ainsi que toutes ces fonctions expriment une *relation de proportionnalité entre y et une certaine puissance* (positive, négative, entière ou fractionnaire) *de x* . On peut donc les grouper sous le nom de « fonction puissance de x », les différents aspects des graphes étant liés aux différentes valeurs positives, négatives, entières ou fractionnaires de n (fig. 64).

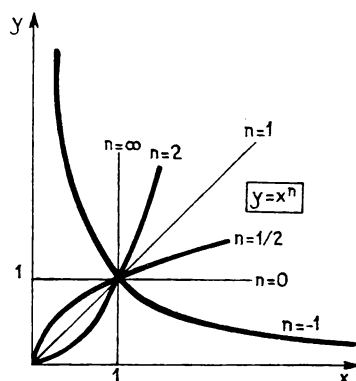


FIG. 64.

Anamorphose linéaire des fonctions algébriques

Il résulte de ces considérations qu'il est toujours possible, par une transformation appropriée de mettre une telle fonction sous la forme d'une fonction linéaire : il suffit pour cela de porter en abscisses non plus x lui-même mais la puissance correspondante de x .

Soit par exemple la fonction $y = a/x^2$. On peut l'écrire $y = ax^{-2}$. Si on porte en abscisses non plus x mais $X = x^{-2}$, c'est-à-dire $1/x^2$, la fonction devient du type $y = aX$ et sa courbe représentative est une droite passant par l'origine des coordonnées (fig. 65).

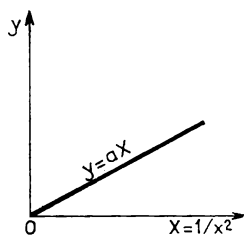


FIG. 65.

Cette propriété est mise à profit notamment en radiothérapie pour établir les diagrammes des doses de rayons X délivrées par la source en fonction de la distance et qui varient, on le sait, en raison inverse du carré de celle-ci.

Nous verrons cependant que cette transformation, dite « *anamorphose linéaire* », des fonctions algébriques, peut être réalisée encore plus commodément à l'aide des graphiques logarithmiques.

* Lois de croissance

Comme illustration des fonctions du type ax^n sur un plan général, on peut citer enfin ce qu'il est convenu d'appeler en biologie les « Lois de croissance ».

On montre en effet qu'entre la croissance y de certains organes et la croissance x de l'organisme entier, il peut exister une relation du type $y = ax^n$ où a est une constante dite « constante de croissance » ou encore « d'équilibre ».

Si $n > 1$, l'organe croît plus rapidement que l'organisme auquel il appartient, la croissance est dite « *allométrique* ».

Si $n = 1$, il y a proportionnalité directe : la croissance est dite « *isométrique* ». La constante a qui exprime alors le rapport de proportionnalité entre les deux croissances est appelée « rapport caractéristique ».

Enfin n peut être négatif. Tandis que l'organisme dans son ensemble se développe, l'organe en question décroît. C'est le cas des organes qui involuent, comme le thymus par exemple. La croissance est dite alors « *énantiomorphe* ».

CHAPITRE V

INTÉGRALES

Etant donné une fonction $y = f(x)$, nous savons qu'on peut calculer sa dérivée $y' = f'(x)$.

Inversement, une fonction étant donnée, on peut se proposer de rechercher une fonction qui l'admette pour dérivée. Une telle fonction est appelée « fonction intégrale » et sa recherche, dite « intégration », est donc l'opération inverse de la dérivation.

Nous allons voir qu'on peut y parvenir par des considérations de surface. Mais il nous faut au préalable expliciter la notion « d'aire intégrale ».

Notion d'aire intégrale

Soit une fonction $y = f(x)$ que nous supposons régulière et continue dans l'intervalle étudié AB délimité par les ordonnées de deux points A et B de coordonnées x_a, y_a et x_b, y_b (fig. 66).

Proposons-nous d'évaluer la surface comprise entre la courbe, l'axe des x et les ordonnées de A et de B , c'est-à-dire la surface du trapèze mixtiligne $AA'B'B = S$ (fig. 66).

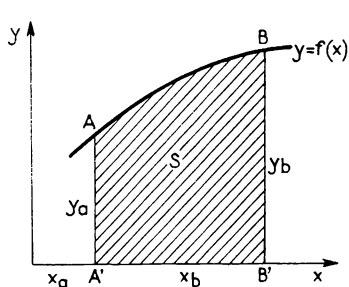


FIG. 66.

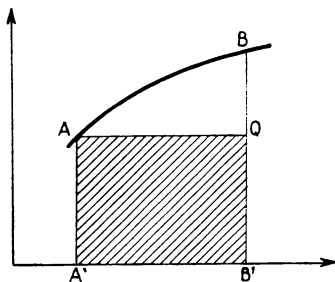


FIG. 67.

Une première approximation, très grossière, consiste à assimiler cette surface à celle du rectangle $AA'B'Q$ construit sur AA' et $A'B'$ (fig. 67).

Mais cette évaluation laisserait de côté toute la surface du triangle mixtiligne AQB (fig. 67).

On peut obtenir une meilleure approximation en divisant la surface étudiée par l'ordonnée CC' telle que $A'C' = C'B'$ (fig. 68). En faisant la somme du rectangle $AA'C'L$, construit sur AA' et $A'C'$, et du rectangle $CC'B'M$ construit sur $C'C$ et $C'B'$, on « récupère » en effet sur le triangle mixtiligne AQB toute la surface du rectangle $CLQM$ (fig. 68).

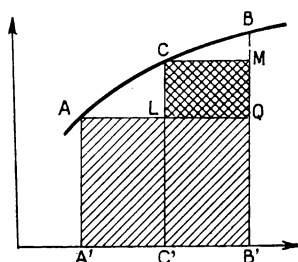


FIG. 68.

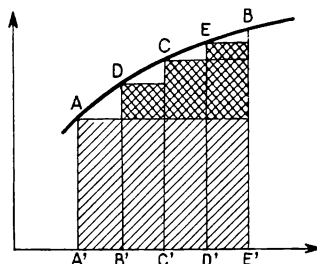


FIG. 69.

Sans doute cette estimation est-elle encore insuffisante, puisqu'elle laisse de côté les triangles mixtilignes ALC et CMB . Mais rien ne nous empêche, si nous désirons une meilleure approximation, de diviser chacune de ces surfaces de la même façon, « récupérant » ainsi chaque fois une partie de la surface du triangle mixtiligne correspondant (fig. 69).

On voit que *plus on divise les surfaces, c'est-à-dire plus les rectangles deviennent étroits* (donc plus il y a de rectangles), *plus la somme de ces surfaces élémentaires se rapproche de la vraie valeur de la surface cherchée S .*

Celle-ci représente donc la limite vers laquelle tend la somme de ces surfaces élémentaires quand leur nombre augmente indéfiniment.

Si donc on veut obtenir la valeur exacte de cette surface, il faut la diviser en un nombre infini de surfaces élémentaires à dimensions transversales infiniment petites et faire la somme de toutes ces surfaces élémentaires : la limite de cette somme sera l'aire exacte, « intégrale » (d'où le nom), de la surface S .

Expression mathématique de l'aire intégrale

Considérons donc une de ces surfaces élémentaires, soit $MM'PP' = dS$ (fig. 70).

Elle a pour largeur une fraction infiniment petite de x , soit dx , et pour hauteur, à gauche : $MM' = y$, et à droite : $PP' = y + dy$.

Quand dx tend vers zéro, c'est-à-dire quand le rectangle devient infiniment étroit, PP' vient rejoindre MM' , $(y + dy)$ se confond alors avec y . On peut donc, à la limite, assimiler la surface élémentaire dS à celle du rectangle de hauteur y et de largeur dx , soit

$$dS = y \cdot dx.$$

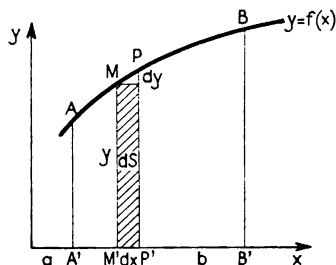


FIG. 70.

Par définition, la surface S fait la somme « intégrale » de ces surfaces élémentaires dS , ce que l'on symbolise par le signe $\int$ qui n'est autre qu'un S allongé et l'on écrit :

$$S = \int ds = \int y \cdot dx$$

qui se lit « somme intégrale de $y \cdot dx$ » ⁽¹⁾.

Le produit $y \cdot dx$, qui représente la surface du rectangle élémentaire et qui correspond au produit de la fonction y par la différentielle dx de la variable est appelé l'*élément différentiel* de l'intégrale.

Mais dans cette somme de rectangles élémentaires on envisage seulement ceux qui sont compris entre l'ordonnée de A et l'ordonnée de B , c'est-à-dire seulement ceux qui correspondent à des valeurs de x comprises entre $x_a = a$ et $x_b = b$: a et b sont les « bornes » ou encore « les limites » de l'intégrale ⁽²⁾,

(1) Le signe $\int$ indique qu'il s'agit de la limite d'une somme comportant un nombre infini de termes eux-mêmes infiniment petits. On ne doit pas le confondre avec le signe Σ qui se rapporte à une addition ordinaire et qui indique la somme elle-même (et non une limite) d'un nombre déterminé de termes eux-mêmes déterminés ou finis.

(2) Signifiant ici simplement les valeurs extrêmes, à ne pas confondre, bien entendu, avec « la limite » (au sens de la théorie des limites) que représente l'intégrale elle-même, comme nous venons de le voir.

ce que l'on indique en mettant ces deux valeurs en indice respectivement à la partie inférieure et supérieure du signe $\int$:

$$S = \int_{x=a}^{x=b} y \cdot dx \quad \text{ou encore, plus simplement} \quad S = \int_a^b y \cdot dx$$

ce qui se lit « somme intégrale de a à b , de $y \cdot dx$ ».

Mais y c'est $f(x)$ et l'expression de l'intégrale devient finalement :

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

ce qui se lit « somme intégrale de a à b , de f de $x \cdot dx$ » et qui représente l'aire intégrale comprise sous la courbe représentative de $y = f(x)$ entre les valeurs $x = a$ et $x = b$.

L'intégrale considérée comme une fonction de x

Supposons que des deux ordonnées qui limitent latéralement l'aire intégrale, l'une, par exemple AA' , soit fixe et l'autre, BB' , soit mobile, c'est-à-dire qu'elle peut se déplacer parallèlement à elle-même, soit vers la droite soit vers la gauche (fig. 71).

Soit $OA' = a$ l'abscisse fixe du point A et $x = OB'$ l'abscisse, supposée variable, du point B .

L'aire intégrale correspondant à B est, par définition, la surface

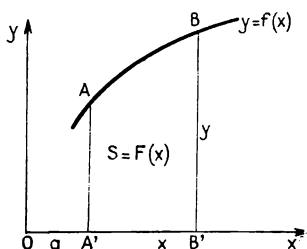


FIG. 71.

$$AA'B'B = S = \int_a^x f(x) \cdot dx.$$

Lorsque le point B se déplace sur $y = f(x)$, la valeur de cette aire intégrale varie. Elle dépend donc de la position du point B , donc de x : c'est donc aussi une fonction de x . Comme elle mesure l'aire intégrale (variable) de $y = f(x)$, on l'appelle *fonction intégrale* de la fonction $y = f(x)$ ou, plus brièvement, « intégrale » de $y = f(x)$. Nous la désignerons par $S = F(x)$. On a donc, par définition,

$S = F(x)$ = Fonction intégrale de la fonction $y = f(x)$

= Surface comprise sous la courbe $y = f(x)$ jusqu'à l'ordonnée correspondant à x

$$= \int_a^x f(x) \cdot dx.$$

Dérivée de la fonction intégrale

Proposons-nous de rechercher la dérivée par rapport à x de cette fonction intégrale, soit dS/dx .

Pour cela nous devons :

- 1° donner à x un accroissement Δx ;
- 2° calculer l'accroissement correspondant ΔS de la fonction, et
- 3° rechercher la limite du rapport $\Delta S/\Delta x$ quand Δx tend vers zéro.

Donnons donc à x un accroissement Δx (fig. 72). Le point B vient en C d'abscisse $(x + \Delta x)$ et d'ordonnée $(y + \Delta y)$. La surface S s'est accrue de la surface élémentaire $BB'C'C = \Delta S$, que nous devons calculer.

Pour ce faire, remarquons que cette surface est comprise entre celle des rectangles $BB'C'Q$ et $CC'B'R$ construits respectivement sur BB' et CC' .

La surface du premier rectangle est égale à $BB' \times B'C'$, soit $y \cdot \Delta x$. Celle du deuxième à $CC' \times B'C'$, soit $(y + \Delta y) \cdot \Delta x$.

On peut donc écrire

$$y \cdot \Delta x < \Delta S < (y + \Delta y) \Delta x.$$

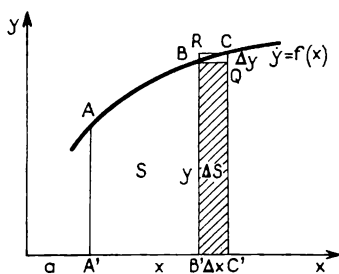


FIG. 72.

Divisons par Δx , de manière à faire apparaître le rapport $\Delta S/\Delta x$, il vient

$$y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Quand Δx tend vers zéro, c'est-à-dire quand CC' se rapproche de BB' , Δy , qui est représenté par CQ (fig. 72), tend, nous le savons, également vers zéro.

Dans ces conditions le rapport $\Delta S/\Delta x$ (qui tend alors par définition vers la dérivée de S) reste toujours compris entre y et une quantité $(y + \Delta y)$ qui tend elle-même vers y . Il ne peut donc qu'être égal à y .

La dérivée de $S = F(x)$ par rapport à x , c'est donc y , c'est-à-dire $f(x)$:

$$\frac{dS}{dx} = y = f(x).$$

Nous aboutissons donc à cette conclusion fondamentale : *La dérivée de la fonction intégrale $S = F(x)$ correspondant à la fonction $y = f(x)$ n'est autre que la fonction $y = f(x)$ elle-même.*

Solution du problème de l'intégration

Le résultat ci-dessus nous permet d'envisager une solution au problème que nous nous étions posé au début de ce chapitre, à savoir : une fonction $f(x)$ étant donnée trouver une fonction qui l'admette comme dérivée : puisqu'en effet la dérivation de $S = F(x)$ aboutit à $y = f(x)$, la fonction $F(x)$ représente bien une primitive pour $f(x)$. Nous la désignerons par Y .

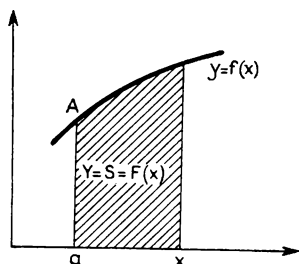


FIG. 73.

Ainsi, une fonction $y = f(x)$ étant donnée, on peut, dans certaines conditions ⁽¹⁾, trouver une fonction qui l'admette pour dérivée : c'est la fonction intégrale correspondante $Y = F(x)$ qui évalue, pour chaque valeur de x , l'aire englobée sous la courbe $y = f(x)$ jusqu'à l'ordonnée correspondant à x (fig. 73). On

l'appelle « Fonction intégrale », ou encore « primitive » de $y = f(x)$

$$Y = F(x) = \text{Intégrale de } y = f(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx.$$

Constante d'intégration

Lorsque nous avons calculé la dérivée de la surface S , nous n'avons pas fait intervenir la position de l'ordonnée de départ AA' . Si donc nous avions

(1) Nous verrons en effet que cela n'est pas toujours possible.

compté les surfaces à partir d'une autre origine telle que $A_1A'_1$ par exemple (fig. 74) correspondant à une autre abscisse fixe a_1 (ce qui revient à ajouter à la surface S une constante représentée par l'aire $AA'A'_1A_1$), nous aurions trouvé pour dérivée de cette nouvelle surface le même résultat, à savoir $y = f(x)$.

Le choix de l'abscisse d'origine étant purement arbitraire, on voit qu'à une même fonction $y = f(x)$, il correspond non pas une seule mais toute une série de fonctions intégrales $Y = F(x)$ qui diffèrent entre elles seulement par une constante⁽¹⁾.

Si donc $Y = F(x)$ est une primitive de $y = f(x)$, une fonction telle que $Y_1 = f(x) + k$ (k étant une constante) sera aussi une primitive de $y = f(x)$.

Quand on a intégré une fonction $y = f(x)$, c'est-à-dire quand on a trouvé une fonction $Y = F(x)$ admettant $y = f(x)$ comme dérivée, il faut donc indiquer que la fonction trouvée représente la primitive cherchée à une constante près seulement et l'on écrit que l'intégrale de $y = f(x)$ c'est $F(x) +$ une constante C :

$$\int f(x) \cdot dx = F(x) + C.$$

La constante C que l'on ajoute ainsi systématiquement à l'expression de l'intégrale est dite « constante d'intégration ».

Conditions initiales

Reste à déterminer la valeur de cette constante d'intégration.

Elle dépend évidemment de la position que l'on s'est fixée pour l'ordonnée d'origine, c'est-à-dire de l'abscisse $x_a = a$ du point A .

Préciser ces données, c'est ce qu'on appelle fixer les *conditions initiales* de l'intégration.

Il suffit pour cela de remarquer que lorsque x devient égal à $x_a = a$, la

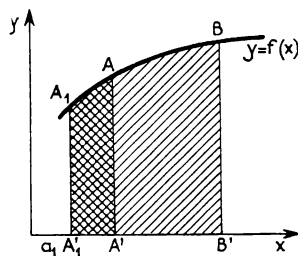


FIG. 74.

⁽¹⁾ Ce résultat ne doit pas nous étonner : nous avons vu en effet que deux fonctions qui ne diffèrent que par une constante admettent la même dérivée.

surface S se réduit à une ordonnée linéaire : l'intégrale est donc nulle pour $x_a = a$.

On peut donc écrire

$$F(x_a) + C = 0.$$

D'où l'on tire la valeur de la constante C :

$$C = -F(x_a).$$

Pour fixer les conditions initiales et obtenir la valeur de la constante d'intégration, il suffit donc de faire $x = a$ dans l'expression de $Y = F(x)$ et de changer le signe du résultat obtenu.

Intégrale définie et intégrale indéfinie

Lorsqu'on s'est fixé les conditions initiales, c'est-à-dire la borne inférieure, et qu'on précise en outre la borne supérieure d'une intégrale, on dit que l'intégrale est « définie » :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \text{intégrale définie}.$$

Une intégrale définie correspond donc à une aire intégrale bien déterminée, c'est donc une grandeur *fixe* bien déterminée, *un nombre* que l'on peut calculer dès lors que l'on connaît la courbe $y = f(x)$ et les limites entre lesquelles s'effectue l'intégration.

Lorsqu'on ne précise pas la borne supérieure de l'intégration, qui est alors une valeur quelconque de x , l'intégrale est dite « indéfinie » ⁽¹⁾

$$\int_a^x f(x) \cdot dx = \text{intégrale indéfinie}.$$

L'intégrale indéfinie est donc une grandeur *variable* qui varie en fonction de x , comme nous l'avons vu, et dont on étudie précisément les variations en cherchant à en établir le graphe.

Dans certains cas enfin, on peut ne s'intéresser qu'à une primitive quelconque (et non pas seulement à celle qui est définie par les conditions

⁽¹⁾ Il serait préférable de dire « non définie » mais cette terminologie est consacrée par l'usage.

initiales). On peut alors ne pas juger utile d'expliciter les bornes de l'intégrale que l'on écrit simplement :

$$\int f(x) \cdot dx.$$

Calcul d'une intégrale définie

Soit (fig. 75) une fonction $y = f(x)$ que nous supposons toujours définie et continue, et deux points M_1 et M_2 correspondant à des valeurs particulières x_1 et x_2 de x . Proposons-nous de calculer l'aire $M_1M'_1M'_2M_2$ qui correspond à l'intégrale définie :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx.$$

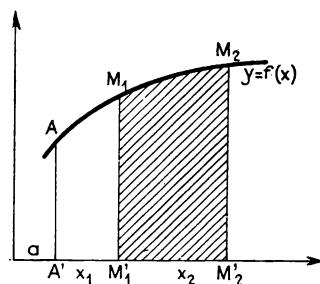


FIG. 75.

La figure montre que

$$\text{Surf. } M_1M'_1M'_2M_2 = \text{Surf. } AA'M'_2M_2 - \text{Surf. } AA'M'_1M_1.$$

La surface $AA'M'_2M_2$ n'est autre que l'intégrale (comptée à partir de l'ordonnée d'origine AA') correspondant à la valeur x_2 de x , soit

$$\int_a^{x_2} f(x) \cdot dx.$$

C'est la valeur que prend l'intégrale $F(x)$ pour $x = x_2$, c'est-à-dire $F(x_2)$.

La surface $AA'M'_1M_1$ n'est autre que l'intégrale, également comptée à partir de AA' , correspondant à la valeur x_1 de x soit

$$\int_a^{x_1} f(x) \cdot dx.$$

C'est la valeur que prend l'intégrale $F(x)$ pour $x = x_1$, c'est-à-dire $F(x_1)$.

On peut donc écrire :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = \int_a^{x_2} f(x) \cdot dx - \int_a^{x_1} f(x) \cdot dx = F(x_2) - F(x_1).$$

Ainsi l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx \text{ est égale à } F(x_2) - F(x_1).$$

Cela veut dire que pour calculer une intégrale définie entre deux valeurs particulières x_1 et x_2 , il faut donner à x successivement la valeur $x = x_2$, puis la valeur $x = x_1$, calculer les intégrales correspondantes, soit $F(x_2)$ et $F(x_1)$ et faire la différence $F(x_2) - F(x_1)$ ⁽¹⁾ : *l'intégrale définie entre deux limites est la différence entre l'intégrale résolue pour la limite supérieure et l'intégrale résolue pour la limite inférieure.*

Echange des bornes

L'intégrale définie $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx$ admet pour borne inférieure (initiale) l'ordonnée x_1 et pour borne supérieure (terminale) l'ordonnée x_2 .

La surface correspondante ne change évidemment pas si, inversement, on part de x_2 pour aboutir à x_1 .

Cette nouvelle intégrale définie, qui s'écrit

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x) \cdot dx$$

sera donc égale, en valeur absolue, à la précédente. Mais nous venons de voir que

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx = F(x_2) - F(x_1).$$

On aura donc

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x) \cdot dx = F(x_1) - F(x_2)$$

et par suite

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x) \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx.$$

(1) Ce que l'on symbolise parfois $[F(x)]_{x_1}^{x_2}$.

Ainsi, lorsqu'on change les bornes d'une intégrale définie, sa valeur absolue reste inchangée, mais son signe s'inverse.

Signe d'une intégrale définie

Les considérations précédentes montrent qu'on est amené à définir le signe d'une intégrale définie, ce qui n'a rien de surprenant puisqu'une intégrale définie, nous l'avons vu, n'est pas autre chose qu'un nombre auquel nous devons donc donner la signification d'un nombre algébrique pouvant être positif ou négatif.

On convient ainsi de considérer l'intégrale définie comme *positive* lorsque, comme dans le cas particulier et favorable de la figure 76, l'ordonnée finale BB' se situe à droite de l'ordonnée d'origine AA'

$$\int_a^b f(x) \cdot dx > 0.$$

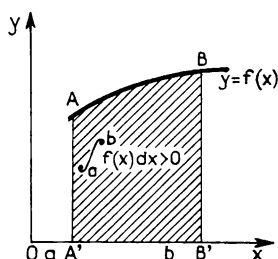


FIG. 76.

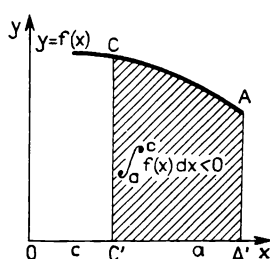


FIG. 77.

Lorsqu'au contraire l'ordonnée finale se trouve à gauche de l'ordonnée d'origine, comme c'est le cas pour l'ordonnée CC' (fig. 77), l'intégrale est considérée comme négative

$$\int_a^c f(x) \cdot dx < 0.$$

De manière plus générale, on considère l'aire intégrale comme positive lorsqu'elle est parcourue en sens inverse des aiguilles d'une montre et comme négative dans le cas contraire (fig. 78).

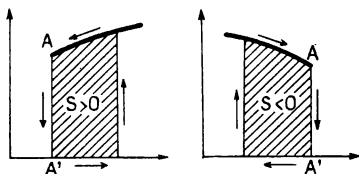


FIG. 78.

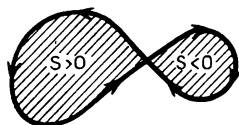


FIG. 79.

Une courbe fermée peut ainsi correspondre à un ensemble d'aires de signes contraires dont il y a lieu alors de faire la somme algébrique (fig. 79).

De tels faits s'observent en particulier, nous le verrons, lorsqu'on étudie le travail fourni par un gaz contre la pression.

Facteur constant dans une intégrale

Multiplions $y \cdot dx$ par un facteur constant k . Tous les rectangles élémentaires verront leurs aires multipliées par k . Il en sera de même par suite pour l'aire intégrale qui fait la somme de ces aires.

Il en résulte que

$$\int k \cdot y \cdot dx = k \int y \cdot dx.$$

Si donc un facteur constant se trouve dans une intégrale, on peut le « sortir » de l'intégrale et le placer devant le signe $\int$.

C'est une propriété très importante de l'intégrale qui est valable pour l'intégrale définie comme pour l'intégrale indéfinie, et que nous aurons d'ailleurs l'occasion d'utiliser.

Aperçu sur le calcul intégral

Trouver l'intégrale $Y = F(x)$ d'une fonction $y = f(x)$ donnée, tel est donc l'objectif du calcul intégral qui se présente ainsi comme le problème inverse du calcul d'une dérivée.

Toutefois ce problème est beaucoup plus difficile que celui de la dérivation. En effet, sous réserve qu'il s'agisse d'une fonction définie et continue, on peut toujours trouver la dérivée d'une fonction algébrique, alors qu'il n'est

pas toujours possible, et c'est même le plus souvent impossible, de trouver une fonction primitive qui soit de nature algébrique.

Il en est ainsi par exemple pour une fonction aussi simple que $y = 1/x$.

Nous ne pouvons pas trouver une fonction algébrique qui l'admette comme dérivée (c'est même cette raison qui a conduit à imaginer un autre type de fonction, non algébrique, comme nous le verrons plus loin).

De manière générale, pour calculer une intégrale on cherche à faire apparaître une expression dont on connaisse la dérivée.

Ainsi, soit à intégrer la fonction $y = x^2$. Nous savons que la dérivée de x^3 , c'est $3x^2$. Pour obtenir comme dérivée non pas $3x^2$ mais x^2 , il aurait fallu partir de l'expression $\frac{1}{3}x^3$ dont la dérivation donne $\frac{1}{3}3x^2 = x^2$.

Nous dirons donc que l'intégrale de $y = x^2$ est $Y = \frac{1}{3}x^3$.

Ce qu'on peut écrire

$$\int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} + C^{\text{te}}.$$

On ne peut définir une règle de conduite générale précise pour calculer une intégrale. Chaque cas réclame un « traitement » particulier et l'habitude, l'intuition, le « flair », jouent un rôle important pour y parvenir. Il existe certes de nombreux artifices de calcul qui sont longuement développés dans les ouvrages spécialisés. Mais leur étude dépasse le cadre élémentaire que nous nous sommes fixé. Nous nous contenterons de donner à la page 237 un tableau des intégrales les plus usuelles.

Calcul de surfaces

Une des applications les plus importantes du calcul intégral est représentée par le calcul des surfaces.

A titre d'exemple et simplement pour montrer les possibilités du calcul intégral dans ce domaine, nous allons calculer la surface comprise sous la parabole $y = x^2$ entre les ordonnées correspondant à $x = -1$ et $x = +1$, c'est-à-dire la surface hachurée de la figure 80.

Par définition, cette surface correspond à l'intégrale de la fonction $y = x^2$ prise depuis

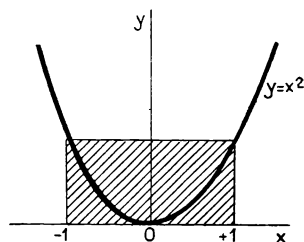


FIG. 80.

l'abscisse $x = -1$ jusqu'à l'abscisse $x = +1$, c'est-à-dire à l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} y \cdot dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \cdot dx.$$

L'intégrale de x^2 , nous venons de le voir, est $x^3/3$, c'est-à-dire que

$$\int x^2 \cdot dx = F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Pour calculer l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} x^2 \cdot dx$, nous savons qu'il faut la résoudre successivement pour sa borne supérieure, puis pour sa borne inférieure, et faire la différence, ce qui donne

$$\int_{-1}^{+1} x^2 \cdot dx = F(1) - F(-1).$$

C'est-à-dire qu'il faut remplacer x par 1, puis par (-1) , dans l'expression $F(x) = x^3/3$, et faire la différence, ce qui donne

$$\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

La surface cherchée est donc égale à $2/3$. La figure montre que le rectangle correspondant est égal à deux fois la surface du carré construit sur l'unité, soit 2. On peut en déduire que la surface comprise sous la parabole est égale au $1/3$ du rectangle qui l'enveloppe, résultat bien connu.

Planimétrie

Si le calcul intégral est utilisé pour évaluer des surfaces, inversement, le calcul d'une intégrale peut être remplacé par une simple mesure de surface.

Si, en effet, on sait tracer la courbe représentative de la fonction à intégrer, il suffira, pour obtenir son intégrale, de mesurer la surface comprise sous la courbe entre les ordonnées appropriées.

Cette mesure de surfaces, dite planimétrie, peut se faire par divers procédés, papier quadrillé, pesée, etc. Des appareils spéciaux comme le planimètre d'Amsler ou l'intégraphe de Boys permettent par un procédé mécanique de mesurer directement la surface cherchée ou de tracer la courbe intégrale à partir des contours de la courbe à intégrer. Il est même possible aujourd'hui

grâce à des procédés optiques ou électroniques d'enregistrer directement la courbe intégrale.

Il en résulte une simplification considérable du travail représenté par l'intégration et on conçoit que cette méthode soit souvent exploitée en pratique. Nous allons en voir quelques exemples se rapportant à la pratique expérimentale ou médicale.

* *Quantité d'électricité*

De fait, indépendamment de ses utilisations purement mathématiques, telles que le calcul des surfaces ou des volumes, le calcul intégral trouve de nombreuses applications dans les sciences expérimentales.

Il arrive souvent en effet, dans l'étude des phénomènes expérimentaux, que l'on puisse établir assez facilement la loi qui régit les variations d'un phénomène dans un petit intervalle de temps dt . On obtient ainsi une fonction dérivée par rapport au temps. Il suffit alors d'intégrer cette fonction pour revenir à la primitive à laquelle on s'intéresse.

Ainsi pour évaluer la *quantité d'électricité* dans un circuit parcouru par un courant d'intensité variable i : on peut considérer que pendant un très petit intervalle de temps dt l'intensité i reste pratiquement constante. La quantité élémentaire d'électricité correspondant à l'intervalle dt est donc $dq = i \cdot dt$. La quantité d'électricité Q sera donnée par l'intégrale $\int dq = \int i \cdot dt$, intégrale que l'on pourra déterminer facilement si l'on connaît l'expression de i en fonction du temps c'est-à-dire la fonction $i = f(t)$.

En effet par définition, l'intégrale $\int i \cdot dt$, correspond à la surface comprise sous la courbe $i = f(t)$ (fig. 81), surface qu'il est facile d'évaluer par planimétrie.

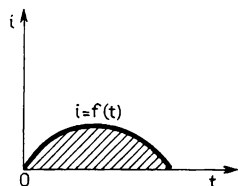


FIG. 81.

* *Diagramme « pression-volume »*

On montre que le travail effectué contre la pression P par un corps gazeux qui passe du volume V_1 au volume V_2 est donné par l'intégrale

$$\int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV^{(1)}.$$

(1) En effet, soit un certain volume de gaz enfermé dans un corps de pompe de section S et qui passe du volume V_1 au volume V_2 à la suite d'un déplacement d'ampli-

Cette intégrale correspond par définition à la surface comprise sous la courbe $P = f(V)$ entre les ordonnées V_1 et V_2 (fig. 83).

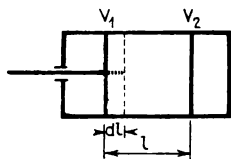


FIG. 82.

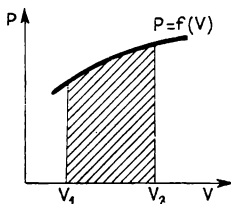


FIG. 83.

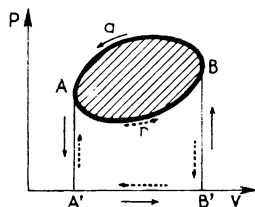


FIG. 84.

Si donc on établit le diagramme pression-volume, on peut mesurer la surface englobée sous la courbe obtenue et évaluer facilement le travail correspondant.

Dans le cas d'un cycle fermé, où pression et volume reviennent à leur valeur de départ (fig. 84), le travail est positif pour l'arc aller AaB qui correspond à l'intégrale positive $AA'B'BaA$ (flèches extérieures, fig. 84), et négatif pour l'arc retour BrA qui correspond à l'intégrale négative $BB'A'ArB$ (flèches intérieures, fig. 84).

Le travail total est alors représenté par l'aire fermée du cycle (fig. 84) que l'on peut évaluer par planimétrie.

* Boucle respiratoire

Une représentation analogue se rencontre en physiologie pulmonaire. On établit de la même façon un diagramme pression-volume confrontant les

tude l du piston (fig. 82). Pour le déplacement élémentaire dl , le travail élémentaire $d\mathcal{C}$ est égal au produit de la force par le déplacement, c'est-à-dire à

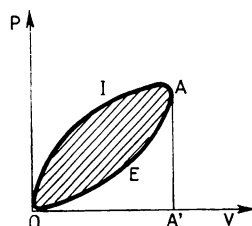
$$F \cdot dl = P \cdot S \cdot dl = P \cdot dV.$$

Le travail total pour aller de V_1 à V_2 sera donc

$$\mathcal{C} = \int_{V_1}^{V_2} d\mathcal{C} = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV.$$

variations de pression de l'air et du volume pulmonaire au cours d'un cycle respiratoire (fig. 85).

FIG. 85. — *Boucle respiratoire.* (D'après P. H. ROSSIER, *Physiopathologie de la respiration*, Delachaux et Niestlé, 1962.)



La surface comprise sous l'arc *OIA* représente le travail fourni par la musculature respiratoire, en particulier contre les résistances élastiques du poumon **et** du thorax, pour que le volume d'air courant puisse être aspiré dans les poumons à l'inspiration. Après la distension inspiratoire les éléments élastiques du poumon et du thorax reviennent à leur état initial et restituent une partie de leur énergie. Ceci correspond à un travail négatif évalué par la surface comprise sous l'arc *OEA*. Le travail résultant est donné par la surface de la boucle fermée *OIAEO*, dite boucle respiratoire (fig. 85).

* Débit cardiaque

Stewart et Hamilton ont montré dès 1920 qu'on pouvait évaluer le débit cardiaque à partir de l'étude des variations de la concentration en fonction du temps d'une substance injectée dans le courant circulatoire.

Si Q est la quantité de substance injectée et c la concentration à l'instant t , on montre que le débit cardiaque D est donné par la formule

$$D = \frac{Q}{\int_0^T c \cdot dt}$$

T étant le temps au bout duquel l'indicateur a fait un tour complet du circuit ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ En effet soit dV le volume liquidien qui passe devant un point A du circuit dans l'intervalle dt . Le débit D est égal, par définition, à dV/dt , d'où $dV = D \cdot dt$. Si c est la concentration de l'instant t , on peut considérer qu'elle n'a pratiquement pas

L'expression qui figure au dénominateur est l'intégrale de la fonction $c = f(t)$, c'est-à-dire de la courbe des concentrations en fonction du temps.

Pour l'obtenir, il suffit, par conséquent, de mesurer la surface englobée sous la courbe des concentrations, dite encore « courbe de dilution », qui a l'aspect représenté à la figure 86.

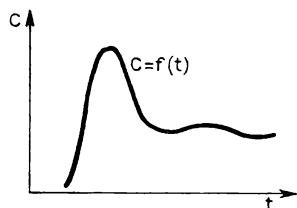


FIG. 86. — *Courbe de dilution.* (D'après G. KIN et Ch. SAVIER, Nouveaux procédés de lecture des courbes de dilution, *Path. Biol.* 1965. 13, 911.)

Celle-ci est établie classiquement en utilisant des indicateurs colorés dont on évalue la concentration sanguine en effectuant des prélèvements artériels à des intervalles réguliers. Aujourd'hui, on utilise plus volontiers des traceurs radioactifs (Albumine marquée à l'iode 131) qui permettent de mesurer la concentration par simple comptage externe et, par suite, d'établir très commodément la courbe $c = f(t)$.

* Débit d'organes. Formule de Ketty-Schmidt

Pour évaluer le débit circulaire au niveau de certains organes (débit rénal, débit cérébral, débit coronaire, etc.) on utilise classiquement la méthode des gaz inertes : le malade respire un gaz inerte, comme le peroxyde d'azote

varié pendant l'intervalle dt . La quantité d'indicateur contenue dans le volume liquidien précédent est donc

$$dQ = c \cdot dV = c \cdot D \cdot dt.$$

Si la totalité de l'indicateur, soit Q , est passée en A entre l'instant 0 et l'instant T , on peut écrire,

$$Q = \int_0^T dQ = \int_0^T c \cdot D \cdot dt$$

c'est-à-dire, puisque D est constant,

$$Q = D \int_0^T c \cdot dt \quad \text{d'où} \quad D = \frac{Q}{\int_0^T c \cdot dt}.$$

par exemple, qui n'est pas utilisé par les tissus. La mesure des concentrations du gaz dans les échantillons artériels et veineux des vaisseaux desservant l'organe permet, grâce à une intégration simple, d'évaluer le débit circulator local.

En effet la concentration du gaz va s'élever rapidement, d'abord dans le sang artériel, puis au fur et à mesure que l'organe débite, dans le sang veineux, et ce jusqu'à égalisation des concentrations artérielle et veineuse, égalisation qui témoigne que la saturation tissulaire est atteinte. Le diagramme des courbes de concentration artérielle et veineuse en fonction du temps a l'aspect représenté à la figure 87.

On montre que si T est le temps au bout duquel la concentration de saturation C_s est atteinte, le débit D est donné par la formule

$$D = \frac{C_s}{\int_0^T (C_A - C_V) dt}$$

dite « Formule de Ketty-Schmidt », dans laquelle C_A et C_V sont respectivement les concentrations artérielle et veineuse instantanées.

L'intégrale qui figure au dénominateur est égale à

$$\int_0^T C_A \cdot dt - \int_0^T C_V \cdot dt.$$

Elle est donc représentée par la surface comprise entre les deux courbes de concentration artérielle et veineuse (surface hachurée de la figure 87), qu'il est possible de mesurer par planimétrie.

On conçoit que le débit soit inversement proportionnel à cette surface : en effet, plus l'organe débite, plus faible sera à chaque instant t la différence entre la concentration artérielle et la concentration veineuse, et plus vite celle-ci rejoindra celle-là (fig. 87).

Plutôt que le peroxyde d'azote, on utilise aujourd'hui des isotopes radioactifs de gaz rares, comme le krypton (Kr 85) et le xénon (Xe 133) qui ont l'avantage d'être complètement inertes du point de vue chimique, de s'éliminer très rapidement et surtout de se prêter, grâce à l'émission des rayons γ , à de simples comptages externes.

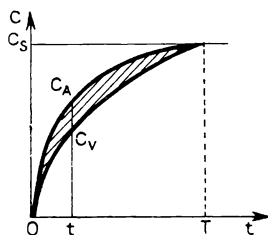


FIG. 87.

CHAPITRE VI

LOGARITHMES NATURELS

Définition

Soit l'hyperbole équilatère $y = 1/x$ dont nous envisagerons seulement la branche correspondant aux valeurs positives de x (fig. 88).

Nous savons qu'elle passe par le point P de coordonnées $x = y = 1$.

Soit M un point de cette courbe, d'abscisse $OM' = x$ et d'ordonnée $M'M = y$.

A chaque valeur de x correspond une certaine valeur de la surface du trapèze mixtiligne $PP'M'M$. Nous appellerons cette valeur, par définition, le *logarithme naturel* ou encore *népérien* ⁽¹⁾ de x , que nous écrirons $\text{Log } x$ (avec L majuscule) :

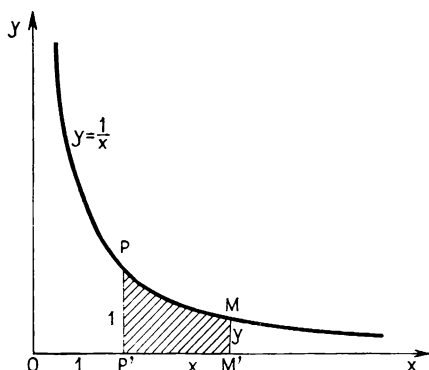


FIG. 88.

$$\text{Log } x = \text{Surface } PP'M'M$$

Notons dès à présent que, d'après cette définition, le *logarithme népérien* de x est l'intégrale de la fonction $y = 1/x$ prise entre les limites 1 et x ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Du nom de leur inventeur, le mathématicien anglais Neper (1550-1617).

⁽²⁾ Ce qui s'écrit

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{1}{x} dx = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Conséquences

1° Il résulte de cette définition que *seuls les nombres positifs* (correspondant aux valeurs positives de x seules envisagées ici) ont des *logarithmes naturels*.

2° D'après les conventions de signe sur les aires, l'intégrale sera comptée positivement à droite et négativement à gauche de l'ordonnée d'origine PP' .

Il en résulte que :

- les nombres supérieurs à 1 ont des logarithmes positifs,
- les nombres positifs inférieurs à 1 ont des logarithmes négatifs.

3° Quand le point M vient en P , la surface $PP'M'M$, réduite à la ligne PP' , a une valeur nulle : *le logarithme népérien de 1 est donc zéro* par définition :

$$\text{Log } 1 = 0.$$

Fonction logarithmique

Puisqu'à toute valeur positive de x correspond une certaine valeur du logarithme naturel de x , ce dernier est une fonction de x : c'est la *fonction logarithmique* $Y = \text{Log } x$, qui étudie les variations du logarithme naturel de x en fonction des variations de x .

D'après la définition que nous avons adoptée, cette fonction exprime les variations de la surface $PP'M'M$ quand M se déplace sur l'hyperbole équilatère.

Nous venons de voir que *lorsque* $x = 1$, $\text{Log } x = 0$. La courbe représentative de $Y = \text{Log } x$ passe donc par le point P' de l'axe des x dont l'abscisse est égale à 1 et dont l'ordonnée est nulle.

Lorsque x est inférieur à 1, c'est-à-dire quand le point M est à gauche de P , son logarithme est négatif, mais la figure montre que quand le point M' se rapproche de l'origine des coordonnées, c'est-à-dire quand x tend vers zéro, le point M s'éloigne à l'infini sur la branche montante de l'hyperbole. Donc quand x tend vers zéro, $\text{Log } x$ tend vers l'infini par valeurs négatives : la courbe $Y = \text{Log } x$ admet donc la branche négative de l'axe des y comme asymptote.

Lorsque x est supérieur à 1, c'est-à-dire quand le point M se trouve

à droite de P , $\text{Log } x$ est positif et la figure montre que lorsque le point M' s'éloigne à l'infini sur l'axe des x , c'est-à-dire quand x tend vers $+\infty$, le point M s'éloigne indéfiniment sur la branche horizontale de l'hyperbole équilatère et, par conséquent, le logarithme naturel de x augmente indéfiniment. Au total, la courbe $Y = \text{Log } x$ a l'aspect représenté à la figure 89.

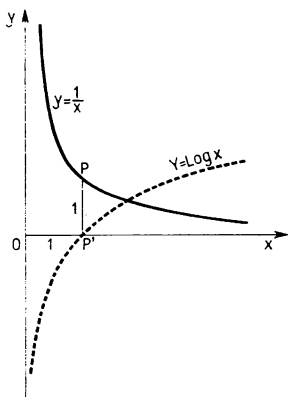


FIG. 89.

Dérivée de la fonction logarithmique

Puisque, par définition, la fonction logarithmique $Y = \text{Log } x$ est l'intégrale de la fonction $y = 1/x$, la dérivée de $Y = \text{Log } x$ n'est autre que $y = 1/x$

$$\boxed{\frac{d(\text{Log } x)}{dx} = \frac{1}{x}}$$

ou encore,

$$\boxed{d(\text{Log } x) = \frac{dx}{x}}$$

Déductions concernant le tracé de la logarithmique

Puisque x ne peut prendre que des valeurs positives, la dérivée $1/x$ est toujours positive. La fonction $Y = \text{Log } x$ est donc continuellement croissante,

comme on peut le vérifier sur la courbe, quand x varie de zéro à $+\infty$.

Mais *cette croissance est de moins en moins marquée à mesure que x augmente* : pour $x = 0$ en effet, la dérivée $1/x$ est infinie, ce qui veut dire que la tangente à la courbe a une pente infinie, c'est-à-dire qu'elle est verticale : c'est l'axe Oy qui, nous l'avons vu, est une asymptote à la courbe.

Ensuite, à mesure qu'on s'éloigne sur l'axe des x , x augmentant, la pente $1/x$ diminue, la tangente à la courbe s'abaisse donc sur l'horizontale et pour les valeurs très grandes de x , la pente $1/x$ tend vers zéro : la tangente tend à devenir horizontale (fig. 90).

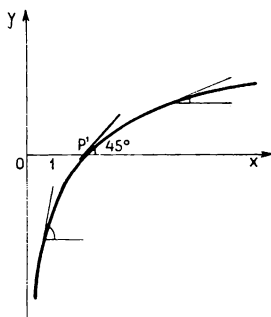


FIG. 90.

A noter que pour $x = 1$, la pente $1/x$ est égale à 1 : la tangente à la courbe en P' est donc inclinée à 45° sur l'horizontale (fig. 90).

Dérivée de $\text{Log } kx$

Nous savons que la dérivée de $\text{Log } x$ est $1/x$. Proposons-nous de rechercher la dérivée de $\text{Log } kx$ où l'abscisse x a été multipliée par une constante k .

Posons $kx = U$. La dérivée de $\text{Log } U$ par rapport à U est $1/U$.

Pour obtenir la dérivée par rapport à x , nous devons, d'après la formule de la dérivée d'une fonction de fonction, multiplier cette expression par la dérivée de U (c'est-à-dire de kx) par rapport à x , soit k , ce qui donne

$$\frac{1}{U} \times k = \frac{1}{kx} \times k = \frac{1}{x}.$$

La dérivée de $\text{Log } kx$ est donc aussi $1/x$.

Additivité des logarithmes

Les fonctions $Y = \text{Log } x$ et $Y = \text{Log } kx$ admettent ainsi la même dérivée $1/x$.

On peut en déduire que ces deux fonctions intégrales ne diffèrent que par une constante :

$$\text{Log } kx - \text{Log } x = C^{\text{te}}. \quad (1)$$

Pour déterminer cette constante, il faut, nous l'avons vu, se placer « dans les conditions initiales », c'est-à-dire donner à x la valeur qui correspond à « l'ordonnée de départ » PP' à partir de laquelle les aires sont comptées, c'est-à-dire 1.

L'expression (1) devient alors

$$\text{Log } k - \text{Log } 1 = C^{\text{te}}.$$

C'est-à-dire, puisque $\text{Log } 1 = 0$,

$$\text{Log } k = C^{\text{te}}.$$

En reportant cette valeur de la constante dans (1), on obtient

$$\text{Log } kx - \text{Log } x = \text{Log } k.$$

C'est-à-dire

$\text{Log } kx = \text{Log } k + \text{Log } x$
--

Le logarithme naturel du produit kx est égal à la somme des logarithmes naturels respectifs des facteurs k et x .

C'est là une propriété fondamentale des logarithmes, connue sous le nom d'additivité des logarithmes.

Logarithme d'un quotient

A partir de la propriété fondamentale d'additivité, on déduit le logarithme naturel d'un quotient :

Soit en effet le quotient $a/b = c$.

On en tire

$$a = b \cdot c.$$

On peut donc écrire

$$\text{Log } a = \text{Log } b + \text{Log } c.$$

D'où

$$\text{Log } c = \text{Log } a - \text{Log } b$$

c'est-à-dire, puisque $c = a/b$

$\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$

Le logarithme naturel d'un quotient est donc égal à la différence des logarithmes naturels du numérateur et du dénominateur.

Logarithme de l'inverse d'un nombre

Soit un nombre a . Son inverse est $1/a$.

D'après la règle précédente, on a

$$\text{Log } \frac{1}{a} = \text{Log } 1 - \text{Log } a = 0 - \text{Log } a = -\text{Log } a$$

Donc

$$\text{Log } \frac{1}{a} = -\text{Log } a$$

Le logarithme naturel de l'inverse d'un nombre est donc égal au logarithme naturel de ce nombre, changé de signe.

Logarithme d'une puissance

On déduit également de la propriété d'additivité le logarithme d'une puissance :

En effet, par définition

$$a^m = a \cdot a \cdot a \dots m \text{ fois.}$$

Donc

$$\text{Log } a^m = \text{Log } a + \text{Log } a + \text{Log } a \dots m \text{ fois} = m \text{ Log } a,$$

$$\text{Log } a^m = m \cdot \text{Log } a$$

Le logarithme de la puissance m d'un nombre est égal à m fois le logarithme de ce nombre.

Base des logarithmes népériens : nombre e

La base d'un système logarithmique est, par définition, un nombre tel que son logarithme, dans le système en question, soit égal à 1.

Cherchons donc la valeur qu'il faut donner à x pour que le logarithme népérien correspondant soit égal à 1.

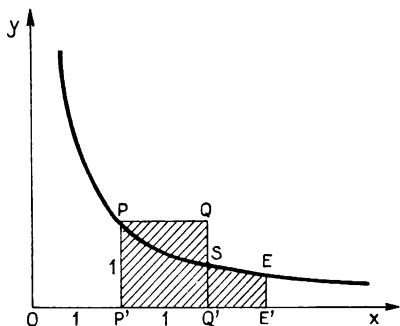


FIG. 91.

Le logarithme népérien de valeur 1 correspond à une surface égale à celle du carré $PP'Q'Q$ construit sur PP' dont le côté est égal à 1 (fig. 91).

La figure montre que si l'on donne à x la valeur 2 qui correspond à l'abscisse OQ' , le logarithme correspondant (c'est-à-dire la surface $PP'Q'S$) sera inférieur à 1, en raison de la concavité de la courbe qui « ampute » le carré $PP'Q'Q$ de la surface du triangle mixtiligne PQS . Pour obtenir un loga-

rithme égal à 1, il faut donc donner à x une valeur un peu supérieure à 2 et, plus précisément, une valeur OE' telle que la surface du trapèze mixtiligne complémentaire correspondant $SQ'E'E$ soit exactement égale à la surface du triangle mixtiligne PSQ amputé par la courbe.

Le calcul montre que l'on obtient ainsi pour abscisse du point E la valeur approchée 2,718 28... valeur que l'on a appelée e

$$e \simeq 2,718\,28\dots^{(1)}.$$

La base des logarithmes népériens est donc ce nombre e et l'on a, par définition,

$$\text{Log } e = 1$$

Points caractéristiques de la logarithmique

Les données précédentes vont nous permettre de préciser davantage le tracé de la logarithmique (fig. 92).

(1) On montre plus précisément (voir Rappels et Compléments p. 226) que le nombre e est un nombre irrationnel correspondant au développement en série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

On voit que le résultat est approximativement égal à $1 + 1 + 1/2$, soit 2,5 + une fraction qui devient de plus en plus petite quand n augmente.

Nous savons déjà qu'elle passe par le point P' de Ox d'abscisse $OP' = 1$.

De plus, puisque $\text{Log } e = 1$, on peut dire qu'à la valeur e , c'est-à-dire $\simeq 2,718$, de l'abscisse correspond une valeur de l'ordonnée égale à 1. La courbe passe donc par le point E d'abscisse e et d'ordonnée $+1$ (fig. 92).

Par ailleurs, pour $Y = -1$, x prend une valeur x_1 définie par $\text{Log } x_1 = -1$, c'est-à-dire $-\text{Log } e$, c'est-à-dire $\text{Log } 1/e$. Donc $x_1 = 1/e$, soit approximativement $0,37$. La courbe passe donc aussi par le point F d'abscisse $1/e \simeq 0,37$ et d'ordonnée -1 (fig. 92).

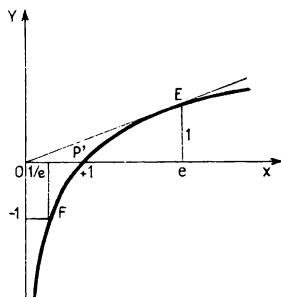


FIG. 92.

Notons encore que la tangente à la courbe en E a pour pente $y' = 1/x = 1/e$, qui est également la pente de la droite OE (fig. 92). La logarithmique admet donc la droite OE comme tangente (fig. 92).

Autre définition des logarithmes népériens

De manière générale, rappelons-le ⁽¹⁾, on appelle logarithme d'un nombre N dans un système de base a l'exposant n dont il faut affecter la base pour obtenir ce nombre.

Autrement dit, pour obtenir N il faut élever a à la puissance n :

$$N = a^n,$$

n est le logarithme de N dans le système de base a , ce qui s'écrit

$$n = \log_a N.$$

Appliquons ces données au système des logarithmes népériens :

Si l'on a

$$Y = \text{Log } x$$

cela veut dire que pour obtenir le nombre x il faut élever la base e des logarithmes népériens à la puissance Y :

$$x = e^Y.$$

(1) Voir p. 215 la définition classique des logarithmes.

D'ailleurs, si l'on prend les logarithmes des deux membres de cette expression, on a bien

$$\text{Log } x = \text{Log } e^Y = Y \cdot \text{Log } e = Y.$$

Il en résulte que les expressions

$$Y = \text{Log } x$$

et

$$x = e^Y$$

sont entièrement équivalentes.

C'est là une notion capitale dont nous aurons à nous souvenir ultérieurement.



CHAPITRE VII

LOGARITHMES VULGAIRES

Définition

Soit la fonction $y = m/x$, où m est un facteur constant. Nous savons que sa courbe représentative, déduite de celle de $y = 1/x$ en multipliant les ordonnées par m , est l'hyperbole équilatère passant par le point M d'abscisse $OP' = 1$ et d'ordonnée $P'M = m$ (fig. 93).

Soit un point N de cette courbe (dont nous ne considérerons que la branche correspondant aux valeurs positives de x) d'abscisse $ON' = x$ et dont l'ordonnée NN' coupe la courbe de $y = 1/x$ en Q .

Nous appellerons *logarithme vulgaire de x* (que nous écrirons $\log x$, avec l minuscule), la surface $MP'N'N$:

$$\log x = \text{Surf. } MP'N'N$$

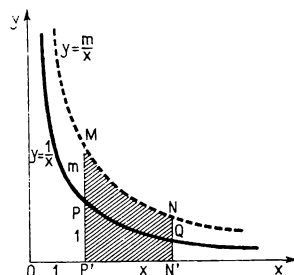


FIG. 93.

Il en résulte que, comme pour les logarithmes naturels :

- seuls les nombres positifs ont des logarithmes vulgaires,
- les nombres supérieurs à 1 ont des logarithmes vulgaires positifs,
- les nombres positifs inférieurs à 1 ont des logarithmes vulgaires négatifs,
- le logarithme vulgaire de 1 est zéro.

Rapport avec les logarithmes naturels

Puisque les abscisses sont les mêmes et que les ordonnées ont simplement été multipliées par m , la surface $MP'N'N$ sera égale à m fois la surface $PP'N'Q$ comprise sous $y = 1/x$ (fig. 93).

Or, cette dernière n'est autre que le logarithme naturel de x , soit $\text{Log } x$ (avec L majuscule).

On peut donc écrire

$$\log x = m \cdot \text{Log } x$$

m est appelé *le module*.

Le logarithme vulgaire d'un nombre est donc égal au logarithme naturel de ce nombre multiplié par le module.

Courbe représentative de $y = \log x$

Puisque $\log x = m \cdot \text{Log } x$, la courbe représentative de $y = \log x$ se déduira de celle de $Y = \text{Log } x$ en multipliant les ordonnées par m , c'est-à-dire en faisant subir à la courbe représentative de la logarithmique une « dilatation » de coefficient m dans le sens des ordonnées.

Des trois points caractéristiques de la logarithmique, le point P' , dont l'ordonnée est nulle, ne bouge pas. Le point E d'abscisse e , dont l'ordonnée est égale à 1, vient en M de même abscisse e et d'ordonnée m . Le point F d'abscisse $1/e$, dont l'ordonnée est égale à -1 , vient en N de même abscisse $1/e$ et d'ordonnée égale à $-m$ (fig. 94).

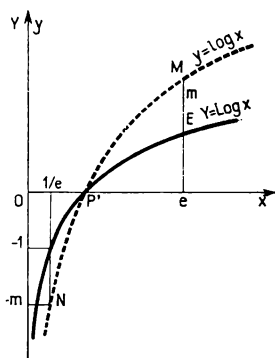


FIG. 94.

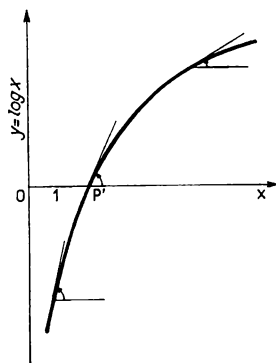


FIG. 95.

Dérivée de la fonction $y = \log x$

D'après la définition que nous avons adoptée, le logarithme vulgaire de x n'est autre que l'intégrale (prise de 1 à x) de la fonction $y = m/x$. Celle-ci est donc la dérivée de la fonction $y = \log x$. En supposant m positif, cette dérivée varie comme $1/x$. Comme pour le logarithme naturel par conséquent, la fonction $y = \log x$ est toujours croissante lorsque x varie de 0 à $+\infty$. Mais, comme pour le logarithme naturel également, cette croissance est de moins en moins marquée à mesure qu'on s'éloigne sur l'axe des x (fig. 95). C'est cette *croissance lente des logarithmes* qui est mise à profit, nous le verrons, dans leurs applications.

Propriétés des logarithmes vulgaires

De la définition que nous avons adoptée il résulte que les propriétés des logarithmes naturels qui s'appuient sur les caractéristiques de l'hyperbole équilatère sont également vraies pour les logarithmes vulgaires.

En particulier, la propriété d'additivité des logarithmes naturels et les propriétés qui en découlent sont partagées également par les logarithmes vulgaires.

On aura donc :

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log \frac{1}{a} = -\log a$$

$$\log a^m = m \cdot \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{1/n} = \frac{1}{n} \log a.$$

On retrouve ainsi les propriétés classiques des logarithmes qui sont à la base de leur utilisation dans les calculs (voir *infra* p. 88).

Base. Module

La base des logarithmes vulgaires sera par définition un nombre a tel que son logarithme vulgaire soit égal à 1

$$\log_a a^{(1)} = 1.$$

Entre le logarithme vulgaire de a , soit $\log a$, et son logarithme népérien, soit $\text{Log } a$, on a la relation

$$\log a = m \cdot \text{Log } a.$$

Donc, par définition, on aura $m \cdot \text{Log } a = 1$, d'où l'on tire :

$$m = \frac{1}{\text{Log } a}$$

Le module d'un système logarithmique est ainsi égal à l'inverse du logarithme naturel de la base.

Logarithmes décimaux

Si $a = 10$, on a le système logarithmique décimal qui a pour base 10. On a donc

$$\log_{10} 10^{(2)} = 1.$$

Le logarithme *naturel* de 10 vaut 2,3. Le module du système décimal est donc :

$$m_{10} = \frac{1}{\text{Log } 10} = \frac{1}{2,3} \simeq 0,43.$$

Pour obtenir le logarithme décimal à partir du logarithme népérien, il faut donc multiplier celui-ci par 0,43. La courbe représentative du logarithme décimal de x se déduit ainsi de celle de $\text{Log } x$ en multipliant les ordonnées

(1) Ce qui s'énonce « logarithme de a dans le système de base a ».

(2) Ce qui se lit « logarithme de 10 dans le système de base 10 ». Le plus souvent, on n'explicite pas le caractère décimal du logarithme vulgaire. Le logarithme décimal d'un nombre x s'écrit alors simplement $\log x$, au lieu de $\log_{10} x$.

par 0,43, ce qui correspond à une réduction de moitié environ de ces ordonnées (fig. 96).

Inversement, pour passer des logarithmes décimaux aux logarithmes népériens, il faut diviser par le module, ce qui revient à multiplier par l'inverse du module, c'est-à-dire par 2,3.

L'importance des logarithmes décimaux vient de ce que notre système de numération est décimal. Aussi sont-ils essentiellement utilisés dans les calculs. Mais dans l'étude des fonctions, ce sont toujours des logarithmes naturels que l'on rencontre. Cela tient à la simplicité de la rela-

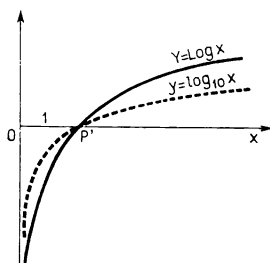


FIG. 96.

tion, dite « équation différentielle », qui unit cette fonction à sa dérivée.

Autre définition des logarithmes vulgaires

Nous avons vu que le logarithme d'un nombre est représenté par l'exposant de la base.

Si donc l'on a

$$y = \log_a x$$

cela veut dire que

$$x = a^y.$$

Dans le système décimal où $a = 10$, le logarithme d'un nombre est donc simplement l'exposant de la puissance de 10 correspondante.

Ainsi le logarithme décimal de 1 000, c'est-à-dire 10^3 , est 3.

$$1\ 000 = 10^3$$

$$3 = \log 1\ 000.$$

Il en résulte que les diverses puissances de 10, à savoir 10^1 , 10^2 , 10^3 ..., etc., 10^n , auront respectivement pour logarithme 1, 2, 3, ..., etc., n . On voit que si les nombres croissent en proportion géométrique, les logarithmes, eux, croissent seulement en proportion arithmétique. Cette propriété, qui est du reste vraie quelle que soit la base, est parfois utilisée pour définir les logarithmes.

CHAPITRE VIII

APPLICATIONS DES LOGARITHMES

Les logarithmes sont utilisés de manière extensive pour les calculs. Mais ils ont également des applications importantes dans les sciences de la vie. Nous en envisagerons quelques-unes dans ce chapitre.

Calculs logarithmiques

La propriété fondamentale d'additivité des logarithmes et celles qui en découlent sont à la base de leur utilisation dans les calculs.

Elles permettent en effet de remplacer les multiplications, divisions, élévations à une puissance, extractions de racine, portant sur les nombres eux-mêmes, respectivement par des additions, soustractions, multiplications ou divisions portant sur leurs logarithmes.

On utilise à cet effet les logarithmes décimaux dont il existe des tables détaillées.

Les tables donnent seulement les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10 (et dont les logarithmes, par conséquent, sont compris entre 0 et 1).

Si le nombre dont on cherche le logarithme n'est pas compris entre 1 et 10, on l'écrit sous forme d'un nombre compris entre 1 et 10 multiplié par une certaine puissance de 10.

Exemple. — Soit à chercher le logarithme de 257,50.

On a

$$257,50 = 2,575 \times 10^2$$

et par suite

$$\log 257,50 = \log 2,575 + \log 10^2.$$

2,575 étant compris entre 1 et 10, son logarithme est donné directement par les tables, qui indiquent $\log 2,575 = 0,1809$. Quant au logarithme de 10^2 , c'est 2. On aura donc

$$\log 257,50 = 0,1809 + 2 = 2,1809.$$

Le logarithme d'un nombre est donc composé de deux parties : l'une, entière, est appelée *caractéristique* du logarithme. C'est la puissance de 10 par laquelle il a fallu multiplier le nombre ramené entre 1 et 10. L'autre partie, décimale, du logarithme, est appelée *la mantisse*. Seule la mantisse est donnée par les tables.

Lorsqu'on a terminé le calcul avec les logarithmes on obtient un résultat qui se trouve sous forme d'un logarithme. Il faut donc encore chercher à quel nombre correspond ce logarithme. Cela se fait à l'aide d'une table dite *table des antilogarithmes* qui s'utilise comme une table de logarithmes. On y trouve le nombre compris entre 1 et 10 correspondant à la mantisse. La caractéristique indique ensuite où il faut placer la virgule.

Exemple. — Soit à trouver le nombre dont le logarithme est 2,3060. La table des antilogarithmiques indique que la mantisse 0,3060 correspond au nombre 2,023. La caractéristique étant 2, cela veut dire qu'il faut multiplier ce nombre par 10^2 , ce qui donne 202,3.

Echelle logarithmique

Une échelle logarithmique est une échelle dont les graduations ont des dimensions proportionnelles non pas aux nombres eux-mêmes, mais aux logarithmes de ces nombres (fig. 97).

Quel que soit le système logarithmique adopté, l'échelle commence toujours au chiffre 1. En effet, d'après la définition des logarithmes, le logarithme de 1 est zéro, quelle que soit la

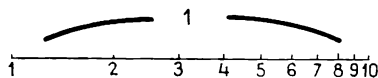


FIG. 97.

base. L'échelle se termine au chiffre représentant la base, soit 10 dans le système décimal usuel, dont le logarithme est égal à 1, c'est-à-dire *l'unité adoptée* pour réaliser l'échelle. Les chiffres intermédiaires 2, 3, 4, etc. jusqu'à 9, se placent à des distances de l'origine qui sont *des fractions de l'unité adoptée* correspondant aux logarithmes respectifs de ces chiffres, soit $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,477$, etc. (fig. 97).

Soit AB (fig. 98) l'échelle unitaire allant de 1 à 10 et M une graduation de cette échelle. La distance AM est, par construction, proportionnelle au logarithme de M . Considérons un point M' situé dans le prolongement de l'échelle à la même distance de B que M de A (fig. 98).

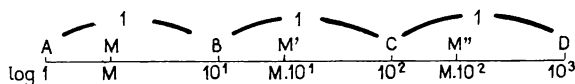


FIG. 98.

Par construction

$$BM' = AM = \log M.$$

On peut écrire

$$AM' = AB + BM' = \log 10 + \log M.$$

Mais AM' c'est, par définition, le logarithme de M' .

On a donc

$$\log M' = \log 10 + \log M.$$

D'où l'on conclut que

$$M' = 10 \times M = M \times 10^1.$$

Si donc on prolonge l'échelle au-delà de B et si l'on reproduit les mêmes graduations que sur la première échelle unitaire, les points obtenus donneront les logarithmes non pas de 2, de 3, etc. mais de 2×10^1 , de 3×10^1 , etc. et en particulier pour le point C qui termine cette deuxième échelle, on aura

$$AC = \log (10 \times 10^1) = \log 10^2.$$

Si l'on avait placé M' en M'' sur une troisième échelle CD faisant suite à la deuxième (fig. 98), on aurait donc eu

$$\log M'' = \log C + \log M = \log 10^2 + \log M$$

d'où $M'' = 10^2 \times M$, et ainsi de suite... On voit ainsi que les graduations d'une échelle logarithmique décimale se reproduisent identiquement de 10 en 10, chaque série de

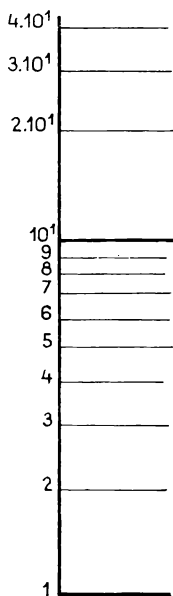


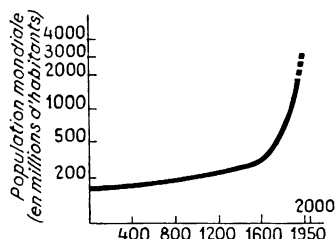
FIG. 99.

dix graduations correspondant aux produits de ces graduations par les puissances successives de 10 (fig. 99). Chaque série unitaire constitue « un cycle ». On trouve dans le commerce des feuilles de 1, 2, 3, 4 ou 5 cycles.

* Circonstances d'utilisation d'une échelle logarithmique

Il résulte des considérations précédentes que le recours à une échelle logarithmique est particulièrement commode *lorsqu'on veut représenter des valeurs ayant une grande marge de variations*, ce qui exigerait des graphiques de très grandes dimensions avec les échelles arithmétiques ordinaires.

FIG. 100. — *Accroissement de la population mondiale.* (D'après R. VOKAER, Stérilisation et contraception, *Presse médicale*, 1962, 70, 2143.)



Ainsi, sur le graphique de la figure 100 qui donne l'accroissement de la population mondiale en millions d'habitants, la graduation la plus faible est 200. Si l'on prend pour la représenter une longueur de 1 cm par exemple, il faudrait, avec une échelle arithmétique, 20 cm pour représenter la graduation la plus élevée qui est 4 000, alors que 5 cm environ seulement sont nécessaires avec une échelle logarithmique ⁽¹⁾.

Mais il est une autre caractéristique de l'échelle logarithmique qui peut également être exploitée, c'est que dans une échelle logarithmique *la distance entre deux graduations est proportionnelle non pas à leur différence, comme dans les échelles arithmétiques, mais à leur rapport* :

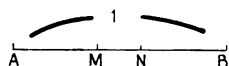


FIG. 101.

Soient en effet deux graduations M et N de l'échelle unitaire AB (fig. 101).

On a

$$MN = AN - AM$$

⁽¹⁾ En effet le logarithme de 2 étant $\simeq 0,3$, la graduation 200 se place au $1/3$ environ de l'échelle unitaire qui correspond à la graduation 1 000. Celle-ci se trouve donc à environ 3 cm et la graduation 4 000 se trouve à une distance de celle-ci égale à $\log 4$, c'est-à-dire à deux fois $\log 2$, soit approximativement 2 cm plus loin.

c'est-à-dire

$$\text{Log } MN = \text{log } N - \text{Log } M$$

ce qui veut dire que

$$MN = \frac{N}{M}.$$

Il en résulte que le recours à une échelle logarithmique est particulièrement indiqué lorsqu'on s'intéresse non pas tellement aux variations absolues mais aux *variations relatives de deux grandeurs*.

On pourra s'en rendre compte par l'exemple suivant emprunté à Morice et col. (1) : les graphiques des figures 102 et 103 donnent l'évolution des taux de mortalité concernant la tuberculose et la fièvre typhoïde à Paris de 1900 à 1945. Mais les taux de mortalité sont portés sur une échelle arithmétique ordinaire dans le premier graphique, alors qu'ils sont portés sur une échelle logarithmique dans le second. D'après le premier

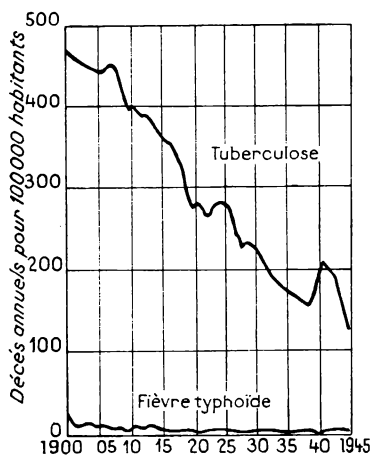


FIG. 102. — Evolution du taux de mortalité par tuberculose et fièvre typhoïde à Paris de 1900 à 1945. Echelle arithmétique. (D'après E. MORICE, *Méthodes statistiques en médecine et biologie*, Masson et C^{ie}, 1947.)

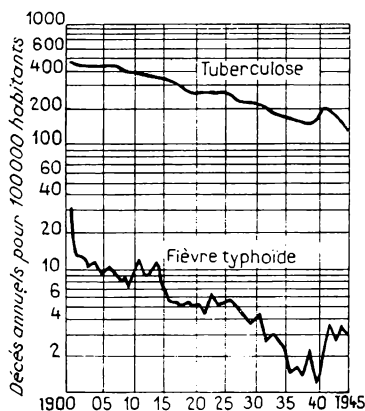


FIG. 103. — Evolution du taux de mortalité par tuberculose et fièvre typhoïde à Paris de 1900 à 1945. Echelle logarithmique. (D'après E. MORICE, *Méthodes statistiques en médecine et biologie*, Masson et C^{ie}, 1947.)

(1) E. MORICE, M. TISSERAND et J. REBOUL, *Méthodes statistiques en Médecine et Biologie*, Masson et C^{ie} éd., Paris 1947, p. 32.

graphique, il semble que le taux de mortalité de la tuberculose diminue beaucoup plus rapidement que celui de la fièvre typhoïde. En réalité, le premier passe de 465 à 125, soit une réduction approximative de 4 à 1, alors que le second passe de 35 à 3, soit une diminution de l'ordre de 10 à 1. La diminution *relative* de ce dernier est donc en fait beaucoup plus importante et c'est ce qui apparaît bien sur le graphique avec l'échelle logarithmique où le tracé concernant le taux de mortalité de la fièvre typhoïde a une pente descendante nettement plus accusée (fig. 103).

Coordonnées logarithmiques et semi-logarithmiques

Dans la représentation graphique en coordonnées cartésiennes, on peut utiliser une échelle logarithmique sur chacun des axes de coordonnées ou sur l'un d'eux seulement, l'autre axe comportant alors une échelle arithmétique ordinaire.

Le premier type de graphique est dit « logarithmique » ou bi-logarithmique (ou encore du type « log-log »), le second « semi-logarithmique ».

Chacun de ces types de graphiques a ses indications : *le graphique bi-logarithmique permet de mettre sous forme linéaire toutes les expressions où la variable est affectée d'un exposant.*

Soit par exemple la fonction $y = x^n$. Si l'on prend les logarithmes des deux membres, cette expression devient

$$\log y = \log x^n = n \cdot \log x ;$$

posons $\log y = Y$ et $\log x = X$, l'expression $\log y = n \cdot \log x$ devient

$$Y = nX$$

qui est l'équation d'une droite passant par l'origine des coordonnées.

Si donc on porte sur les axes Ox et Oy , non plus x et y , mais respectivement $X = \log x$ et $Y = \log y$, c'est-à-dire si l'on utilise un graphique bi-logarithmique, la courbe obtenue sera une droite (fig. 104).

On dispose ainsi d'une méthode extrêmement simple pour réaliser l'anamorphose linéaire des fonctions algébriques simples du type $y = ax^n$ précédemment étudiées.

Le graphique semi-logarithmique, lui, permet de mettre sous forme linéaire les expressions où la variable figure elle-même en exposant.

Soit en effet l'expression

$$y = a^x$$

où a est une constante.

Prenons les logarithmes des deux membres. Il vient

$$\log y = \log a^x = x \cdot \log a.$$

Mais a étant une constante, $\log a$ l'est également et on peut écrire

$$\log y = k \cdot x.$$

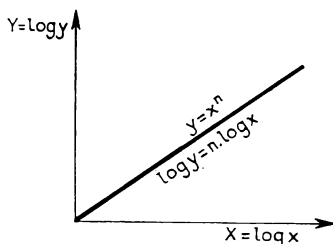


FIG. 104.

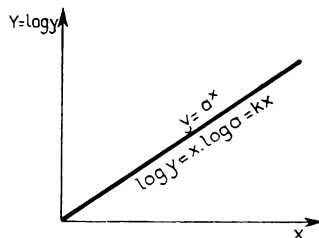


FIG. 105.

L'expression de $\log y$ en fonction de x est donc une droite du type

$$Y = k \cdot x.$$

Si donc, l'axe des x restant inchangé, on porte sur l'axe des y , non plus y , mais $Y = \log y$, c'est-à-dire si l'on utilise un graphique semi-logarithmique, la courbe obtenue sera une droite (fig. 105). Ce procédé est utilisé de façon constante, nous le verrons, pour l'étude des fonctions exponentielles où précisément l'inconnue x figure en exposant.

* Règles et cercles à calcul

Les propriétés de l'échelle logarithmique et celles des logarithmes sont encore exploitées pour réaliser des règles à calculer.

La règle porte une échelle logarithmique tracée sur une réglette fixe F (fig. 106).

Une échelle identique est tracée sur une réglette mobile M qui peut s'appliquer bord à bord sur la précédente.

Pour effectuer un produit $a \cdot b$ on fait glisser la réglette mobile M de manière que sa graduation 1 se place exactement sur la graduation a de l'échelle fixe. On se reporte ensuite à la graduation b de l'échelle mobile. En

regard de b , on trouve, sur l'échelle fixe, la graduation c qui est le résultat cherché.

En effet, soit

l_1 la distance de 1 à a

l_2 la distance de 1 à b

l_3 la distance de 1 à c

la figure montre que

$$l_1 + l_2 = l_3$$

c'est-à-dire

$$\log a + \log b = \log c$$

donc

$$a \cdot b = c.$$

Inversement la figure montre que

$$l_3 - l_2 = l_1$$

c'est-à-dire

$$\log c - \log b = \log a$$

donc

$$a = \frac{c}{b}.$$

Pour diviser, il suffit donc de faire coïncider le numérateur (c), pris sur la règle fixe, avec le dénominateur (b), pris sur la règle mobile. Le quotient (a) se trouve sur la règle fixe en face du chiffre 1 de la règlette mobile (fig. 106).

La règle peut être également utilisée pour calculer les puissances et les racines. Il suffit pour cela de réaliser la correspondance, par l'intermédiaire

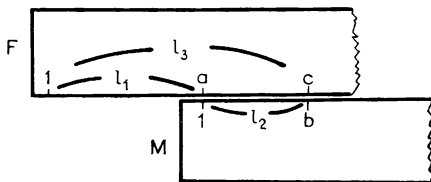


FIG. 106.

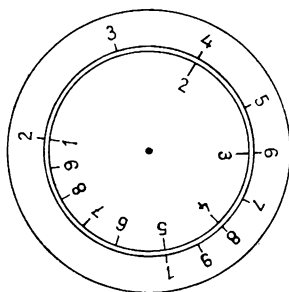


FIG. 107.

d'un curseur, entre des échelles logarithmiques dont les dimensions sont respectivement deux fois, trois fois, etc. celles de l'échelle de base pour les puissances, et $1/2$, $1/3$, etc., de celles de l'échelle de base pour les racines carrées, cubiques, etc., respectivement.

Le curseur permet également de procéder à des opérations successives sans effectuer les résultats intermédiaires.

La règle peut être prolongée indéfiniment, les traits 10, 20, 30, etc., se plaçant les uns par rapport aux autres comme précédemment les traits 1, 2, 3, etc., ainsi que nous l'avons vu pour toute échelle logarithmique.

On peut diminuer l'encombrement de l'appareil en traçant les divisions sur des cercles concentriques mobiles l'un par rapport à l'autre, chaque cercle portant une seule division de 1 à 10. La graduation se répète alors indéfiniment et on ne sort jamais des limites de la règle (fig. 107).

* Relation logarithmique effet-dose

En biologie expérimentale, lorsqu'on étudie les réponses à des doses progressivement croissantes de substance active, on constate qu'en général les effets obtenus ne sont pas proportionnels aux doses utilisées : de petites doses produisent un effet minime, des doses moyennes entraînent des effets rapidement croissants, mais si l'on augmente encore les doses, on n'observe qu'une faible augmentation de la réponse, comme s'il y avait « saturation » du récepteur (fig. 108).

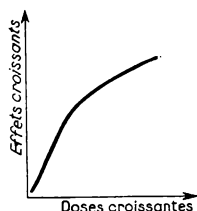


FIG. 108. — *Courbe de réponse effet/dose.* (D'après L. LISON, *Statistique appliquée à la biologie expérimentale*, Gauthier-Villars, 1958.)

La courbe obtenue s'apparente à une logarithmique. On a constaté en effet empiriquement que pour la plupart des effets physiologiques il y avait une certaine *proportionnalité entre l'effet et, non pas la dose, mais le logarithme de la dose* : si l'on administre la substance étudiée à des doses croissantes comme 10^2 , 10^3 , etc., les effets croissent seulement comme 2, 3, etc.

c'est-à-dire comme le log de 10^2 , de 10^3 , etc. (on dit encore que les effets croissent en proportion arithmétique quand les doses augmentent en proportion géométrique).

En réalité, la relation de proportionnalité n'existe que pour un certain intervalle de doses correspondant aux doses moyennes. Elle ne joue plus pour les doses extrêmes (s'il n'en était pas ainsi, les doses très fortes devraient par exemple produire des effets infinis, ce qui n'est pas le cas en pratique).

Les essais biologiques ne sont donc valables que pour cet intervalle moyen et il est nécessaire, par conséquent, de s'assurer si, pour les doses utilisées, la relation de proportionnalité joue effectivement.

Toutefois, il n'est pas commode de vérifier que des points expérimentaux se situent sur une courbe effectivement logarithmique. Pour tourner cette difficulté, il suffit d'utiliser un graphique semi-logarithmique : en effet, si sur l'un des axes on porte, non pas les doses d , mais les logarithmes de ces doses, la courbe devient une droite (fig. 109). Dans ces conditions, il suffit de vérifier que les points expérimentaux sont alignés, ce qui est évidemment beaucoup plus facile.

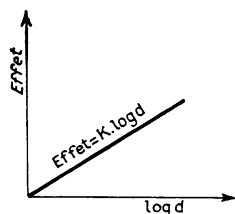


FIG. 109.

* Loi de Weber-Fechner

C'est une loi bien connue de psychologie expérimentale suivant laquelle quand l'excitant croît en proportion géométrique la sensation, elle, croît seulement en proportion arithmétique : la sensation croît comme le logarithme de l'excitation

$$S = k \cdot \log E.$$

Cette loi ne représente, on le voit, qu'un cas particulier de la loi très générale que nous venons d'étudier avec la relation effet-dose.

Elle se vérifie dans les divers domaines sensitifs, tactile, visuel, auditif : c'est ainsi que si l'on fait entendre à un sujet des bruits dont l'intensité varie comme 10^2 , 10^3 , etc., ou si on lui présente des écrans dont la luminosité varie dans les mêmes proportions, le sujet percevra des sons ou des sensations lumineuses qui lui paraîtront seulement deux fois, trois fois, etc., plus intenses.

* Notion de décibel. Audiométrie

La notion de logarithme s'est imposée tout naturellement en acoustique. En effet, le son le plus intense (S_M), qui se situe à la limite supérieure de sensibilité de l'audition, correspond à une énergie de 1 mW/cm^2 , alors que le son le plus faible, qui se situe à la limite inférieure de l'audibilité (S_m) correspond à une énergie de 10^{-13} mW/cm^2 . Le son le plus fort est donc 10^{13} fois plus intense que le son le plus faible que l'oreille puisse percevoir.

On a donc été amené à classer les sons, non pas d'après leur intensité en valeur absolue, mais d'après le rapport de leur intensité à l'intensité du son minimal, c'est-à-dire le nombre de fois que l'intensité du son en question contient l'intensité du son minimal, soit S/S_m , ce qui représente une certaine puissance de 10, et on caractérise ce rapport par son logarithme, c'est-à-dire l'exposant de la puissance de 10 considérée, qui constitue le bel, unité d'intensité : c'est ainsi que le son le plus fort, qui représente 10^{13} fois le son le plus

faible, aura une intensité de 13 bels. Un son de 5 bels est 10^5 fois plus fort que le son minimal, etc. Les sons audibles s'étagent donc de 1 à 13 bels ⁽¹⁾.

En vertu de la loi de Weber-Fechner, un son de 10 bels par exemple, qui est donc 10^{10} fois plus intense qu'un son de 1 bel, sera perçu comme 10 fois plus intense seulement que ce dernier sur le plan subjectif.

La loi de Weber-Fechner réalise donc un « écrasement logarithmique » de l'intensité subjective qui peut être considéré comme un mécanisme de protection de l'oreille interne.

Les limites de sensibilité des sons varient suivant leur fréquence, comme le montre le graphique, dit de Wegel, qui représente l'intensité des sons en fonction de leur fréquence (fig. 110). En audiométrie, on étudie les pertes auditives (évaluées en décibels) chez un sujet donné pour les sons de diverses fréquences. Le diagramme obtenu, dit « audiogramme » permet, grâce à

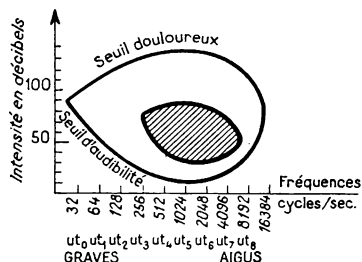


FIG. 110. — Graphique de Wegel.

⁽¹⁾ En pratique, le bel est une unité trop forte et on utilise généralement le décibel qui représente le dixième du bel. Les sons audibles s'étagent donc de 10 à 130 décibels.

certaines épreuves fonctionnelles, une analyse très poussée de la fonction auditive (fig. 111).

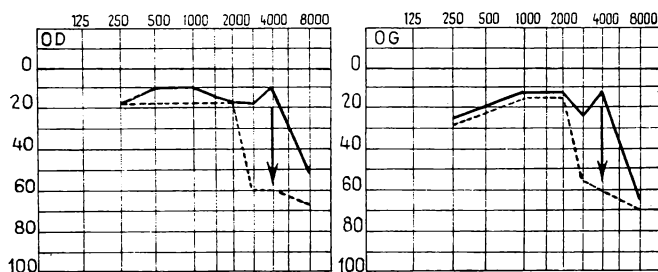


FIG. 111. — Audiogrammes de début et de fin de traitement après administration d'un antibiotique. Chute de 50 décibels sur la fréquence 4 000 c/s. (D'après PERNOD et col., *Thérapie*, 1962, 17, 1169.)

* Notion de pH

Le pH ou « potentiel Hydrogène » est une notation logarithmique qui s'est imposée en raison de sa commodité comme indice de l'acidité.

En effet, les acides doivent leur acidité aux ions hydrogène exclusivement. Cette acidité peut donc être exprimée par la concentration en ions H^+ , symbolisée $[H^+]$ ⁽¹⁾.

Toutefois, pour les substances rencontrées dans la pratique, cette concentration varie de 1 (pour les acides forts) à $1/10^{14}$, c'est-à-dire 10^{-14} (pour les bases fortes).

A la suite de Soerensen, on a alors adopté comme indice de l'acidité, non pas la concentration en ions H^+ elle-même, mais l'exposant de la puissance de 10 correspondante, soit 14 par exemple pour 10^{-14} , cet exposant étant pris positivement pour éviter de traîner le signe moins.

Cet exposant qui est donc le *logarithme décimal, changé de signe, de la concentration en ions H*, a été appelé le pH :

$$pH = -\log [H^+].$$

L'échelle des pH s'étale ainsi de 0 à 14 (fig. 112).

(1) Le signe $[]$ symbolise la concentration.

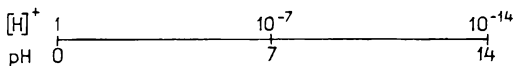


FIG. 112.

Cette notation, qui introduit une simplification évidente, présente cependant un inconvénient : le pH constitue un indice d'acidité qui diminue quand l'acidité augmente.

Le pH 7, qui est celui de la neutralité, correspond au pH de l'eau.

* Notion de pK, formule d'Henderson-Hasselbach

La dissociation d'un acide AH se fait suivant la réaction



D'après la loi d'action de masse, il existe un rapport constant entre le produit $[A^-] \cdot [H^+]$ des concentrations de l'anion $[A^-]$ et de l'ion $[H^+]$ d'une part et, d'autre part, la concentration en molécules d'acide non dissociées $[AH]$:

$$\frac{[A^-] \cdot [H^+]}{[AH]} = K$$

K est appelée *constante de dissociation*.

Par analogie avec le pH, on appelle pK la *logarithme décimal, changé de signe, de la constante de dissociation K* :

$$pK = -\log K.$$

C'est ainsi que pour l'acide carbonique on a



et

$$\frac{[CO_3H^-] \cdot [H^+]}{[CO_3H_2]} = 10^{-6,4}$$

d'où $pK = 6,4$.

De la loi d'action de masse, on tire

$$[H^+] = K \cdot \frac{[AH]}{[A^-]}$$

et

$$\frac{1}{[\text{H}^+]} = \frac{1}{K} \cdot \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log \frac{1}{[\text{H}^+]} (\text{c'est-à-dire } -\log [\text{H}^+]) = \log \frac{1}{K} (\text{c'est-à-dire } -\log K) + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

c'est-à-dire

$$\text{pH} = \text{pK} + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

c'est la formule dite d'Henderson-Hasselbach qui a de nombreuses implications en biologie, notamment dans les mécanismes physiologiques qui assurent la régulation du pH sanguin. C'est qu'en effet elle est à la base du fonctionnement des « systèmes tampon ».

* *Systèmes tampon*

On appelle « système tampon », rappelons-le, l'ensemble formé par un acide faible et le sel d'une base forte, cette dénomination se justifiant parce qu'un tel système permet « d'amortir » les variations du pH.

Le fonctionnement d'un système tampon se comprend aisément à la lumière des considérations précédentes.

Soit en effet un système tampon formé par un acide faible AH et un sel de sodium ANa.

La formule d'Henderson appliquée à la dissociation de l'acide donne :

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

où pK_a est le pK de l'acide considéré.

Le pH du système dépend donc des proportions respectives de $[\text{A}^-]$ et de $[\text{AH}]$. Mais AH étant un acide faible, il est très peu dissocié. Par suite, la concentration en acide non dissocié $[\text{AH}]$ représente la quasi-totalité de l'acide, donc, pratiquement, la concentration de l'acide.

En revanche, le sel ANa provenant d'une base forte, il est très dissocié, pratiquement en totalité, suivant la réaction



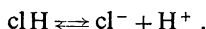
On peut donc admettre que la quasi-totalité des ions A^- provient de la dissociation du sel ANa et que, par suite, la concentration des ions $[\text{A}^-]$ est voisine de la concentration en sel.

La formule de Henderson devient alors

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{Sel}]}{[\text{Acide}]}.$$

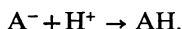
Le pH du système tampon dépend donc des proportions respectives du sel et de l'acide.

Supposons qu'on ajoute un acide fort, cl H par exemple, ce qui revient à ajouter des ions H^+



Les ions H^+ provenant de la dissociation de l'acide fort vont rencontrer un excès d'ions A^- provenant de la dissociation du sel ANa.

Ils vont se recombinaer avec eux pour reformer l'acide AH, suivant la réaction



L'acide AH se substitue donc à l'acide cl H , tandis que la concentration en sel ANa diminue. Le résultat final est donc une augmentation de AH et une diminution de ANa, c'est-à-dire une diminution du rapport Sel/Acide, donc une diminution du pH, c'est-à-dire une augmentation de l'acidité. Mais la formule d'Henderson montre que *le pH ne varie que comme le logarithme de ce rapport*. L'acidité n'augmente donc que faiblement. En pratique tout se passe comme si l'adjonction d'un acide fort très dissocié, donc générateur d'une grande quantité de H^+ , était remplacée par l'adjonction de l'acide faible AH très peu dissocié. La concentration en H^+ augmente seulement dans de faibles proportions et le pH n'est que modérément affecté.

*** Etude de la fonction $\text{pH} = f(x)$
pour un système tampon équimoléculaire**

Un système tampon est dit équimoléculaire lorsque l'acide et le sel qui le constituent existent à des concentrations égales

$$[\text{AH}] = [\text{ANa}] = \alpha.$$

La fonction $\text{pH} = f(x)$ étudie comment varie le pH de ce système en fonction des quantités variables x (en molécules-grammes) d'acide ou de base forte que l'on rajoute.

Si l'on rajoute x moles de cl H par exemple, il apparaît x moles d'acide AH et il disparaît la même quantité x de moles de sel ANa .

Les nouvelles concentrations sont alors

$$\text{AH} = \alpha + x,$$

$$\text{ANa} = \alpha - x.$$

La formule de Henderson devient

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{\alpha - x}{\alpha + x}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log 1 = \text{pK}_a.$$

La courbe $\text{pH} = f(x)$ coupe donc l'ordonnée à l'origine au point P d'ordonnée $OP = \text{pK}_a$.

Pour $x = \alpha$, on a

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{0}{2\alpha}.$$

Comme $\log 0 = -\infty$, on voit que pour $x = \alpha$, la fraction tend vers $-\infty$: la courbe est asymptote vers le bas à la verticale $+\alpha$ (fig. 113). Si l'on change x en $-x$, on voit que la fraction $(\alpha - x)/(\alpha + x)$ s'inverse. Son logarithme est donc égal à celui de la fraction $(\alpha - x)/(\alpha + x)$ changé de signe : la partie de la courbe située à gauche de l'ordonnée à l'origine est donc symétrique de celle située à droite de cette ordonnée par rapport au point P . La verticale $x = -\alpha$ est donc aussi une asymptote à la courbe qui, dans l'ensemble, revêt l'aspect représenté à la figure 113.

Le point P qui est un point d'inflexion correspond à $\text{pH} = \text{pK}_a$. Dans cette zone l'adjonction de quantités notables d'acide n'entraîne qu'une très faible variation du pH.

Si, au lieu de rajouter de l'acide on rajoute une base, c'est la concentration de l'acide AH qui est diminuée : $\text{AH} = \alpha - x$ et la concentration du sel ANa qui augmente : $\text{ANa} = \alpha + x$, le rapport devient $(\alpha + x)/(\alpha - x)$. La courbe est donc symétrique de la précédente par rapport au point P (fig. 114).

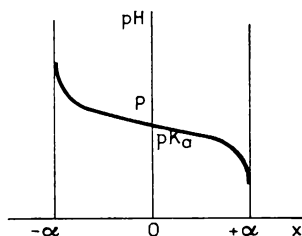


FIG. 113. — Variation du pH d'un système tampon équimoléculaire. (D'après C. BÉNÉZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^{ie}, 1958.)

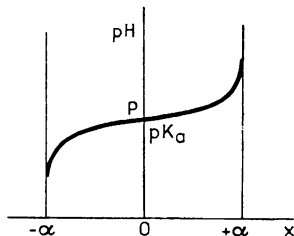


FIG. 114.

C'est une courbe de ce type qui nous a servi d'exemple au début du chapitre II pour introduire la notion de taux de croissance d'une fonction.

CHAPITRE IX

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Ce sont des fonctions où la variable x figure elle-même en exposant. Elles sont de la forme générale

$$y = a^x$$

où a est une constante positive.

Toutefois, pour le médecin et le biologiste, les plus importantes des fonctions exponentielles sont celles où la constante a est représentée par la base e des logarithmes népériens. Seules en pratique ces dernières fonctions seront étudiées ici.

Fonction $y = e^x$ (1).

Si $y = e^x$ cela veut dire, nous l'avons vu, et c'est le moment de nous en souvenir, que x est le logarithme népérien de y . On a donc

$$x = \text{Log } y.$$

Or, nous connaissons déjà la fonction $y = \text{Log } x$, qui est la fonction logarithmique.

La fonction $x = \text{Log } y$ s'obtient en remplaçant dans cette dernière x par y et y par x : c'est donc la fonction inverse de la fonction logarithmique : l'exponentielle $y = e^x$ est donc la « réciproque » de la logarithmique $y = \text{Log } x$.

Pour obtenir sa courbe représentative, il suffira donc de retourner celle de la logarithmique $y = \text{Log } x$ autour de la bissectrice des axes (fig. 115).

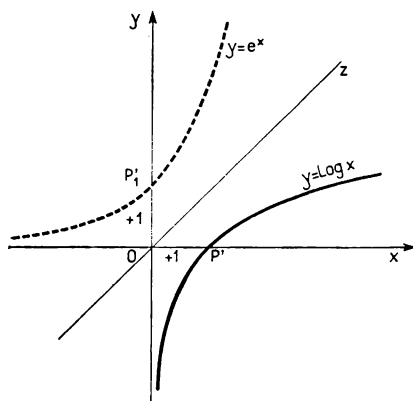


FIG. 115.

(1) Encore symbolisée : $\exp [x]$.

L'exponentielle $y = e^x$ admettra donc pour asymptote la branche *négative* de Ox et elle coupera Oy en P'_1 symétrique de P' et d'ordonnée $OP'_1 = +1$ (fig. 115).

Dérivée de $y = e^x$

Puisque $y = e^x$ est l'inverse de la fonction logarithmique, pour obtenir sa dérivée, il suffira d'inverser la dérivée de la logarithmique (qui est, on s'en souvient, $1/x$), ce qui donne x , et de changer x en y , ce qui donne y , c'est-à-dire e^x .

La dérivée de $y = e^x$, c'est donc e^x , c'est-à-dire la fonction elle-même :

Cette fonction présente ainsi la particularité tout à fait remarquable de s'admettre elle-même comme dérivée :

$$y' = y$$

De ce fait, elle se confond également avec ses dérivées successives qui sont toujours égales à la fonction $y = e^x = y' = y'' = \text{etc.} = e^x$.

Déductions quant au graphe de e^x

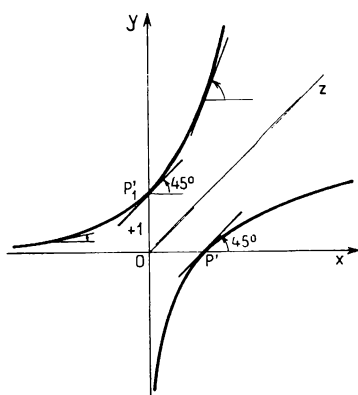


FIG. 116.

L'expression e^x étant toujours positive, la dérivée est toujours positive. La fonction $y = e^x$ est donc toujours croissante quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, comme on peut le vérifier sur la courbe.

De plus, la relation $y' = y$ montre que le *taux de croissance* de cette fonction est à chaque instant exactement égal à la valeur actuelle de la fonction, d'où la croissance très rapide de cette fonction dès qu'elle devient supérieure à 1, comme en témoigne la branche très rapidement ascendante de la courbe pour les valeurs de $y > 1$.

Cela veut dire également que la pente de la tangente à la courbe en un point donné est égale à la valeur de l'ordonnée en ce point : pour les fortes

valeurs négatives de x , qui correspondent à des valeurs très faibles de y , la pente est elle-même très faible, pratiquement nulle : la tangente est horizontale, c'est l'axe des x lui-même, qui est une asymptote de la courbe (fig. 116). Ensuite, la pente augmente, la tangente se redresse et tend à devenir verticale pour les valeurs positives de x qui correspondent à une croissance très rapide de y . Pour $x = 0$, y , nous l'avons vu, est égal à $+1$, qui est l'ordonnée du point P'_1 (1) : la tangente à la courbe en P'_1 a donc pour pente $+1$, c'est-à-dire qu'elle est inclinée à 45° sur l'horizontale, comme l'était du reste sa symétrique en P' (fig. 116).

Fonction $y = e^{-x}$

Pour passer de $y = e^x$ à $y = e^{-x}$, il suffit de changer x en $-x$, ce qui revient à effectuer une symétrie autour de Oy .

La courbe représentative de $y = e^{-x}$ s'obtiendra donc en retournant celle de $y = e^x$ autour de l'axe des y (fig. 117).

Elle passe toujours par le point P'_1 qui, situé sur l'axe de symétrie, ne bouge pas. Mais elle admet pour asymptote, au lieu de la branche négative, la branche positive de Ox (fig. 117).

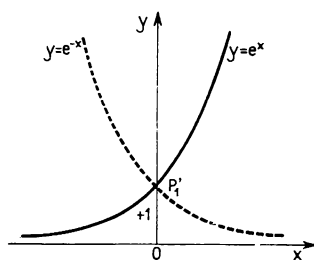


FIG. 117.

Dérivée de e^{-x}

Pour calculer la dérivée de $y = e^{-x}$, posons $-x = U$.

La fonction devient $y = e^U$. La dérivée de cette fonction *par rapport à* U est, nous venons de le voir, e^U , c'est-à-dire e^{-x} .

Pour calculer sa dérivée *par rapport à* x , nous devons, d'après la règle de la dérivée d'une fonction *par rapport à* x , multiplier cette expression par la dérivée de U (c'est-à-dire de $-x$) par rapport à x , soit -1 , ce qui donne

$$-1 \cdot e^{-x} = -e^{-x}.$$

(1) Pour $x = 0$, on a d'ailleurs $y = e^0 = 1$.

La dérivée de e^{-x} est donc $y' = -e^{-x}$, c'est-à-dire $-y$:

$$y' = -y$$

La dérivée de $y = e^{-x}$ est donc égale à y en valeur absolue, mais de signe contraire.

Sa courbe représentative est donc symétrique de $y = e^{-x}$ par rapport à l'axe des x et elle se situe entièrement au-dessous de cet axe (fig. 118).

Déductions quant au graphe de e^{-x}

Sa dérivée étant toujours négative, la fonction $y = e^{-x}$ est toujours décroissante, comme on peut le constater, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, et l'égalité de y et de y' en valeur absolue permet de dire que le taux de décroissance de cette fonction est à chaque instant exactement égal à la valeur actuelle de la fonction. Ceci rend compte de la décroissance très rapide de cette fonction tant que y reste supérieur à 1, ce qui correspond aux valeurs négatives de x , et de sa décroissance très lente au contraire pour les valeurs de y inférieures à 1, qui correspondent aux valeurs positives de x (fig. 118) : la tangente à la courbe, d'abord presque verticale pour les fortes valeurs négatives de x , s'abaisse de plus en plus sur l'horizontale pour les valeurs positives de x (fig. 118). Pour les très grandes valeurs positives de x , le graphe de la dérivée montre qu'elle tend vers zéro. La tangente à la courbe tend donc alors vers l'horizontale : c'est

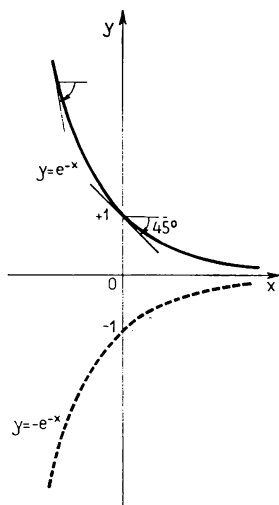


FIG. 118.

l'axe des x lui-même, qui est une asymptote de la courbe (fig. 118). Pour $x = 0$, $y' = -e^0 = -1$: la tangente à la courbe en P_1 est donc inclinée à 45° vers le bas sur l'horizontale (fig. 118).

Fonction $y = e^{-kx}$

C'est la fonction précédente où l'exposant x est multiplié par un facteur k que nous supposons positif.

Soit x_1 une valeur de l'abscisse x (fig. 119). Pour cette valeur de x , la fonction $y = e^{-x}$ prend une valeur $y_1 = e^{-x_1}$ (fig. 119).

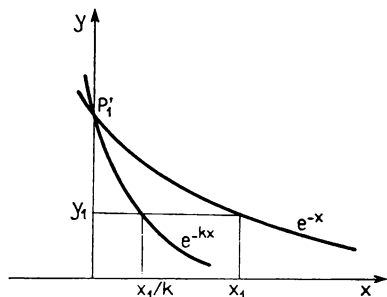


FIG. 119.

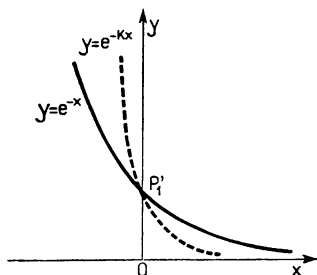


FIG. 120.

Considérons maintenant l'abscisse de valeur x_1/k . Pour cette valeur de l'abscisse la fonction $y = e^{-kx}$ prend la valeur

$$\exp \left[-k \frac{x_1}{k} \right] = \exp [-x_1] = e^{-x_1} = y_1 .$$

Les fonctions e^{-x} et e^{-kx} ont donc même valeur pour des abscisses respectivement égales à x et à x/k (fig. 119).

Pour obtenir le graphe de e^{-kx} , il suffira donc de diviser par k les abscisses de e^{-x} , ce qui revient à faire subir à la courbe e^{-x} une « contraction » horizontale de coefficient $1/k$ qui rapproche la courbe de l'axe des y (fig. 120).

Si k est inférieur à 1, $1/k$ est supérieur à 1 : la courbe e^{-kx} se situe alors « à l'extérieur » de la courbe e^{-x} (fig. 121).

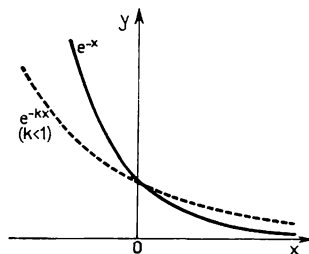


FIG. 121.

Dérivée de $y = e^{-kx}$

Pour obtenir la dérivée de $y = e^{-kx}$, posons $kx = U$.

La fonction devient $y = e^{-U}$. La dérivée de cette fonction *par rapport à U* est, nous l'avons vu, $-e^{-U}$. D'après la règle concernant la dérivée d'une fonction de fonction, pour obtenir la dérivée *par rapport à x*, il faut multiplier cette expression par la dérivée de U (c'est-à-dire de kx) par rapport à x, soit k , ce qui donne $-k \cdot e^{-U}$, c'est-à-dire $-k \cdot e^{-kx}$.

Mais e^{-kx} , c'est y . La dérivée y' de $y = e^{-kx}$ est donc $-ky$:

$$y' = -ky$$

La dérivée de cette exponentielle est donc *négative et non plus égale mais proportionnelle à la fonction elle-même*.

Déductions quant au graphe de e^{-kx}

On peut en déduire que la fonction $y = e^{-kx}$ *décroît constamment et en proportion constante de sa valeur actuelle*.

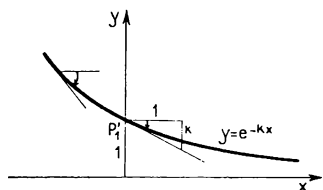


FIG. 122.

Comme pour e^{-x} , la tangente à la courbe s'abaisse progressivement sur l'horizontale lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$ (fig. 122).

Pour $x = 0$, y , nous l'avons vu, est égal à 1 qui est l'ordonnée de P'_1 et par suite $y' = -ky = -k$: la tangente à la courbe en P'_1 est donc une droite descendante de pente k (fig. 122). Le coefficient k qui exprime la proportionnalité entre la fonction et sa dérivée mesure donc la valeur de la pente de la courbe en P'_1 . C'est pourquoi on l'appelle souvent *pente de l'exponentielle*.

Inversement, on le conçoit, si une grandeur décroît en proportion constante k de sa valeur actuelle, on peut en déduire que cette décroissance suit une loi exponentielle du type $y = e^{-kx}$.

C'est là une notion très importante que nous aurons souvent l'occasion d'utiliser.

Signification de l'exponentielle $y = e^{-kx}$

La relation $y' = -ky$ qui caractérise l'exponentielle décroissante $y = e^{-kx}$

peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{y} = -k \cdot dx.$$

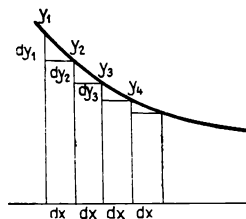


FIG. 123.

Si l'on considère des intervalles élémentaires égaux obtenus en partageant la courbe par des ordonnées successives y_1, y_2, y_3 , etc., équidistantes de dx (fig. 123), on aura d'un intervalle à l'autre :

$$\frac{dy_1}{y_1} = -k dx, \quad \frac{dy_2}{y_2} = -k dx, \quad \frac{dy_3}{y_3} = -k dx, \quad \text{etc.}$$

c'est-à-dire, puisque les dx sont égaux,

$$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy_2}{y_2} = \frac{dy_3}{y_3} = \text{etc.} = -k dx.$$

La quantité dy dont y diminue d'une ordonnée à la suivante est donc une fraction constante de y : si, par exemple, pour un intervalle dx donné, $dy = 1/10 y_1$, il en sera de même pour toutes les ordonnées successives prises à des intervalles égaux à dx et l'on aura

$$dy_1 = \frac{1}{10} y_1, \quad dy_2 = \frac{1}{10} y_2, \quad \text{etc.}$$

Lorsque la variable est le temps, comme c'est souvent le cas, la loi exponentielle décroissante exprime donc que dans des intervalles de temps égaux la fonction diminue d'une fraction constante de sa valeur initiale et ce, quel que soit le moment où l'on se place sur l'axe des temps.

Si, par exemple, au bout d'une minute la fonction a diminué du dixième de sa valeur initiale, il en sera de même au cours de la deuxième, de la troisième, etc., de la n^{e} minute : dans chaque « tranche de temps » de une minute la fonction diminue du dixième de la valeur qu'elle avait en abordant cette « tranche » et ce, quelle que soit la position de cette « tranche » sur l'axe des temps.

C'est là une propriété fondamentale de l'exponentielle décroissante dont nous aurons l'occasion de voir de nombreuses applications.

Expression linéaire de l'exponentielle e^{-kx}

L'exponentielle $y = e^{-kx}$ peut, par une transformation simple, se mettre sous forme linéaire : en effet, prenons les logarithmes des deux membres, il vient

$$\log y = \log e^{-kx} = -kx \cdot \log e = -k'x \text{ (avec } k' = k \log e \text{)}.$$

Si donc on porte sur l'axe des ordonnées, non pas y , mais $Y = \log y$, l'axe des x restant inchangé, c'est-à-dire si l'on utilise un graphique semi-logarithmique, la courbe représentative de l'exponentielle e^{-kx} devient une courbe de la forme $Y = -k'x$, c'est-à-dire une droite descendante de pente k' tel que $k' = k \log e \approx 0,43 k$ ⁽¹⁾ (fig. 124).

Cette transformation linéaire de l'exponentielle simplifie considérablement son tracé. Aussi est-elle très souvent utilisée comme nous en verrons de nombreux exemples au chapitre suivant.

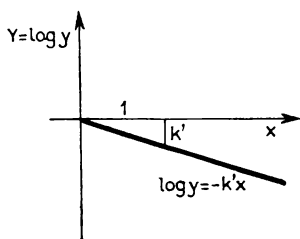


FIG. 124.

(1) La pente de l'exponentielle en coordonnées semi-logarithmiques est donc égale à la pente k de l'exponentielle en coordonnées ordinaires multipliée par 0,43.

CHAPITRE X

LA DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE EN BIOLOGIE

S'il est une fonction que médecins et biologistes se doivent de connaître tout particulièrement, c'est bien l'exponentielle décroissante : c'est qu'en effet la décroissance exponentielle du type e^{-kx} est de beaucoup la loi de variation la plus souvent rencontrée dans les sciences de la vie.

Pour illustrer ce propos nous allons, au cours de ce chapitre, en voir quelques exemples parmi les plus caractéristiques.

** Désintégration radio-active*

La désintégration des substances radio-actives offre un exemple bien connu de décroissance exponentielle.

On montre en effet que si N_0 est le nombre d'atomes de la substance radio-active présents au temps $t_0 = 0$, le nombre N d'atomes non encore désintégrés présents au temps t est donné par la relation

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (1)$$

ou encore

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}.$$

(1) Nous verrons page 174 comment on aboutit à cette formule en partant de l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

qui exprime que le nombre dN d'atomes qui se désintègrent dans l'intervalle de temps dt est proportionnel au nombre N d'atomes présents à cet instant.

La courbe représentative de N/N_0 en fonction du temps t est donc une exponentielle de type e^{-kx} où x est remplacé par t et k par λ (fig. 125).

Pour obtenir directement la courbe du nombre N d'atomes en fonction du temps, il suffit de multiplier par N_0 les ordonnées de la courbe précédente, ce qui revient à effectuer simplement un changement d'unité sur l'axe des ordonnées.

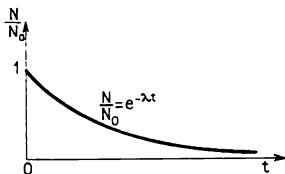


FIG. 125.

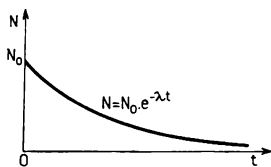


FIG. 126.

L'ordonnée à l'origine est alors $N_0 \times 1 = N_0$: au temps $t = 0$, le nombre d'atomes est donc égal à N_0 et il décroît ensuite exponentiellement avec le temps suivant une exponentielle de pente λ (fig. 126).

D'après ce que nous avons vu sur la signification de l'exponentielle décroissante, l'exponentielle de la désintégration radio-active exprime que la quantité dont diminue la fonction (c'est-à-dire ici le nombre d'atomes qui se désintègrent) dans un même intervalle de temps est une proportion constante de la valeur initiale (c'est-à-dire ici du nombre initial d'atomes que comportait la substance radio-active) ⁽¹⁾.

(1) C'est ce qu'exprime, nous l'avons vu, l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Cette relation peut encore s'écrire,

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt.$$

Le nombre dN d'atomes qui se sont désintégrés dans l'intervalle dt , rapporté au nombre N d'atomes présents à cet instant, soit dN/N , représente la probabilité qu'a chaque atome de se désintégrer pendant l'intervalle de temps dt . Pour un même intervalle dt cette probabilité de désintégration est donc constante et égale à λ . L'exponentielle décroissante de la désintégration radio-active exprime donc en fait que la probabilité de désintégration est constante pour un même intervalle de temps dt , quelle que soit la position de cet intervalle sur l'axe des temps.

Le coefficient de proportionnalité λ qui mesure la pente de l'exponentielle est la *constante de désintégration radio-active*, valeur caractéristique du corps étudié. Elle indique la proportion d'atomes qui se désintègrent dans l'unité de temps ⁽¹⁾. Ainsi, la constante de désintégration radio-active du radium est $\lambda_{ra} = 1,36 \cdot 10^{-11}$ par seconde, soit approximativement $1/10^{11}$: chaque seconde il disparaît donc environ un atome sur 10^{11} .

* Période radio-active

La période radio-active, dite encore période *physique*, d'un radio-élément est le temps T au bout duquel la moitié des atomes initialement présents se sont désintégrés. Pour ce temps T , on a donc $N = \frac{1}{2} N_0$ (fig. 127) et, par conséquent,

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$$

donc

$$e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$e^{\lambda T} = 2.$$

Prenons les logarithmes népériens des deux membres, il vient

$$\lambda T = \text{Log } 2$$

d'où

$$T = \frac{\text{Log } 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

$$T = \frac{0,693}{\lambda}$$

relation importante dont il est fait un usage constant en médecine isotopique.

(1) La relation

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

montre en effet que pour un intervalle dt égal à l'unité on a

$$\frac{dN}{N} = -\lambda.$$

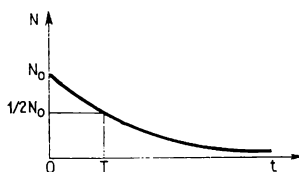


FIG. 127.

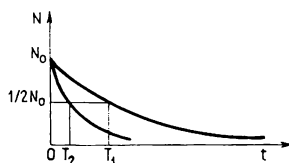


FIG. 128.

Elle montre que la période varie en sens inverse de λ . On voit en effet que plus la pente de l'exponentielle est accusée, plus brève est la période (fig. 128).

La période, encore appelée « *demi-vie* » de la substance radio-active, est très variable d'un élément à l'autre. Elle est de 1 620 années pour le radium, ce qui signifie que si l'on part d'un gramme de radium pur, il n'en restera plus que 0,5 g 1 620 ans après, 0,250 g seulement 1 620 ans après, soit au bout de 3 240 ans, 0,125 g 1 620 ans encore après, soit dans 4 860 ans, etc. Elle est de plusieurs milliards d'années pour le thorium, d'une fraction de milliardième de seconde pour le radium C, de huit jours pour l'iode 131, etc. En médecine isotopique, la connaissance de la période du radio-élément est évidemment une donnée essentielle pour l'exploitation envisagée, soit pour exclure l'utilisation clinique de certains isotopes, comme le C_{14} dont la période trop longue est rédhitoire, soit au contraire pour profiter de la période extrêmement brève de certains isotopes (utilisation de I_{132} chez l'enfant).

* Expression linéaire de l'exponentielle de désintégration radio-active

Appliquons à l'exponentielle de désintégration radio-active les notions étudiées page 112 concernant l'expression linéaire de l'exponentielle du type e^{-kx} : l'exponentielle $N/N_0 = e^{-\lambda t}$ devient en coordonnées semi-logarithmiques une droite descendante de pente

$$\lambda' = \lambda \log e \simeq 0,43 \lambda.$$

Au temps $t = 0$, $N = N_0$,

d'où
$$\frac{N}{N_0} = 1 \quad \text{et} \quad \text{Log} \frac{N}{N_0} = 0 :$$

le point correspondant se trouve donc au zéro de l'échelle logarithmique, c'est-à-dire au début d'un cycle logarithmique, à la graduation 1 de cette échelle, qui représente 100 % de la quantité de substance initialement présente.

Pour tracer la droite, il suffit de trouver un deuxième point. Il en est un tout indiqué, c'est celui qui correspond à la période T du corps radio-actif. Au bout du temps T , on trouve seulement 50 % de la quantité de substance radio-active initialement présente. Le point cherché se trouve donc à l'intersection des coordonnées correspondantes (fig. 129).

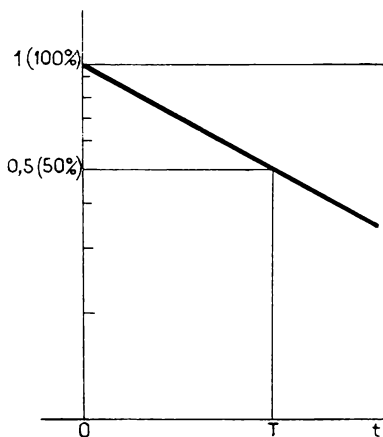


FIG. 129.

* Absorption d'un rayonnement. Loi de Lambert

Lorsqu'une radiation traverse une certaine épaisseur de matière, une partie de son énergie est absorbée par les molécules du corps traversé. Il en résulte une diminution de l'intensité I_0 de la radiation incidente. Cette diminution se fait suivant une loi exponentielle : l'intensité résiduelle I est une fonction exponentielle de l'épaisseur l :

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu l}.$$

La courbe représentative de l'intensité résiduelle I , en fonction de l'épaisseur l est donc aussi une exponentielle décroissante du type e^{-kx} où x est

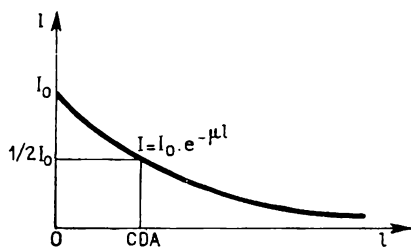


FIG. 130.

la même façon. Elle indique que la quantité de rayonnement absorbée à chaque niveau de matière traversée est proportionnelle à la quantité de rayonnement présente et que, par suite, des couches successives d'égale épaisseur absorbent une fraction constante du rayonnement qui arrive à la surface du corps absorbant, quelle que soit leur profondeur sur le trajet du rayonnement ⁽¹⁾.

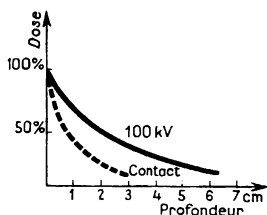


FIG. 131. — Répartition des doses en profondeur en radiothérapie superficielle (100 kV) et en radiothérapie de contact (50 kV). (D'après M. DANA, Application en dermatologie des techniques modernes de radiothérapie, Presse médicale, 1962, 70, 1143).

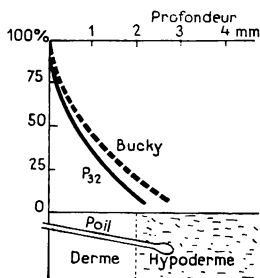


FIG. 132. — Distribution en profondeur des doses de P₃₂ et de rayons de Bucky (8 kV). (D'après M. DANA, Presse médicale, 1962, 70, 1143).

⁽¹⁾ Comme la loi de désintégration radio-active, la loi de Lambert est en fait l'expression d'une loi de probabilité : elle exprime en effet que la probabilité statistique

Par analogie avec ce que nous avons vu pour λ , μ indique la fraction de l'intensité initiale qui est absorbée par unité d'épaisseur.

De même qu'on définissait la période T ou « demi-vie » d'un corps radio-actif, on définit une *couche de demi-absorption* ou de demi-atténuation (C.D.A.) représentée par l'épaisseur qui entraîne la diminution de moitié de l'intensité initiale (fig. 130). Un raisonnement absolument calqué sur le précédent montrerait que la C.D.A. = $0,693/\mu$.

Cette notion est exploitée en radiologie et en radiothérapie pour la protection des parties non irradiées.

D'autre part, en radiothérapie superficielle, la peau joue le rôle d'un corps absorbant et l'on constate que la distribution de la dose en profondeur se fait suivant une loi exponentielle, tant pour les radiations électro-magnétiques (fig. 131) que pour les rayons β émis par les radio-éléments (fig. 132).

* *Elimination rénale exponentielle. Notion d'Hémikrèse*

A la suite notamment des travaux de Lapp⁽¹⁾, on admet que l'élimination par l'émonctoire rénal de certaines substances diffusibles présentes dans le courant circulatoire, en particulier les substances étrangères à l'organisme, comme les médicaments, obéit à une loi exponentielle. Si Q_0 est la quantité de substance présente dans le plasma au temps $t = 0$, la quantité de substance présente dans le plasma à l'instant t sera donnée par la relation

$$Q = Q_0 \cdot e^{-kt} \quad (2).$$

de rencontre des photons de la radiation incidente avec les modécules du corps traversé est constante pour une même épaisseur de matière.

(1) LAPP, M. C., « Posologie et cinétique. Les bases fondamentales de la cinétique de l'élimination des médicaments », *Biologie Médicale*, n° 4, 1955, pp. 86 à 481.

(2) Cette loi exprime le fait que le taux de variation de la substance éliminée dans l'intervalle dt , soit dQ/dt , est proportionnel à la quantité Q de substance présente à ce moment :

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ$$

équation différentielle qui conduit, de la même façon que précédemment, à la relation exponentielle

$$Q = Q_0 \cdot e^{-kt}.$$

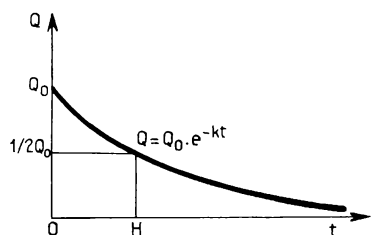


FIG. 133.

La courbe représentative de Q en fonction du temps t est donc une exponentielle décroissante de pente k (fig. 133).

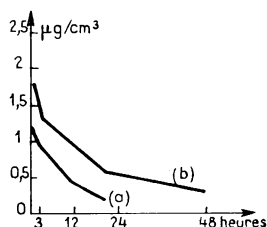
Lapp a appelé *Hémikrèse* le temps nécessaire pour éliminer la moitié de la quantité de substance administrée, c'est-à-dire le temps H correspondant à $Q_0/2$ (fig. 133).

L'hémikrèse, on le voit, est l'équivalent de la période d'un corps radio-actif.

Elle représente, on le conçoit, une donnée fondamentale en thérapeutique.

Elle permet en particulier de fixer l'intervalle qu'il convient d'observer entre les prises successives d'un médicament pour obtenir dans l'organisme une concentration suffisante de substance active.

FIG. 134. — *Tetracyclémies observées après administration I.M. de 250 mg de tetracycline ordinaire (a) et la même dose de tetracycline « retard » (b). (D'après B. SUREAU, Variations des taux sanguins d'antibiotique, Rev. Fr. Etudes Clin. Biol., 1963, 8, 292.)*



C'est ainsi qu'un produit à hémikrèse brève, comme la pénicilline ordinaire par exemple, devra être administré à intervalles rapprochés, inconvénient qui a conduit à mettre au point des formes dites « retard », dont les courbes de disparition ont une pente plus faible, donc des hémikrèses plus importantes, permettant d'espacer davantage les injections (fig. 134).

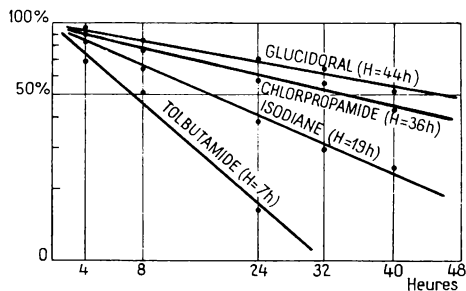


FIG. 135. — *Droites semi-logarithmiques d'élimination de différents hypoglycémiantes de synthèse. (D'après MORDO, Mode et vitesse d'élimination des hypoglycémiantes de synthèse, L'Hôpital, mars 1962.)*

Bien entendu, en coordonnées semi-logarithmiques, l'exponentielle se transforme en droite et les points expérimentaux se trouvent approximativement alignés. Cette transformation linéaire permet en particulier de comparer commodément les hémikrèses de diverses substances (fig. 135).

*** Clearance fractionnelle. Epreuve à la B.S.P.**

L'épuration plasmatique du type exponentiel n'est pas le privilège de l'émonctoire rénal. Quel que soit l'émonctoire envisagé en effet on constate que l'élimination hors du plasma d'une substance étrangère à celui-ci se fait suivant une loi exponentielle superposable à celle qui caractérise l'élimination rénale

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\alpha t} \quad (1).$$

α , qui mesure la pente de l'exponentielle d'épuration, représente la fraction de Q qui est épurée dans l'unité de temps⁽²⁾. On l'appelle la *Clearance fractionnelle* (ou relative) de la substance considérée pour l'émonctoire envisagé.

On conçoit que plus l'épuration exercée par l'émonctoire en question est efficace, plus la substance sera éliminée rapidement, plus la pente de l'exponentielle sera accusée : la clearance fractionnelle d'une substance peut donc être exploitée pour apprécier la valeur fonctionnelle de l'émonctoire chargé de l'éliminer.

C'est ainsi que la fonction d'épuration plasmatique du foie peut être explorée en

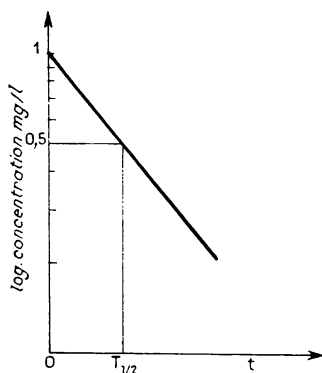


FIG. 136.

(1) Comme précédemment cette loi exprime que le taux de variation, soit dQ/dt est proportionnel à la quantité Q de substance présente à ce moment, le coefficient de proportionnalité étant ici α :

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q.$$

(2) La relation

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q,$$

(Suite de la note p. 122.)

étudiant la clearance fractionnelle d'un colorant, la Bromosulphone Phtaléine (BSP), qui est éliminé par la cellule hépatique.

La BSP est injectée par voie intraveineuse et on mesure sa concentration sanguine à des intervalles définis. Les résultats enregistrés sont reportés sur un graphique semi-logarithmique. Dans ces conditions, l'exponentielle s'anamorphose en droite. On peut alors déterminer facilement le temps $T_{1/2}$ correspondant à la disparition de la moitié de la substance injectée (fig. 136). On en déduit α par la relation

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{0,693}{\alpha}.$$

*** Epreuve d'hyperglycémie intraveineuse.
Coefficient d'assimilation glucidique**

Si l'on administre à un sujet normal une dose standard de glucose par voie intraveineuse on constate que le taux de la glycémie s'élève d'abord rapidement dans les minutes qui suivent l'injection puis, dans une deuxième phase, la glycémie s'abaisse pour revenir progressivement à son taux de départ (fig. 137).

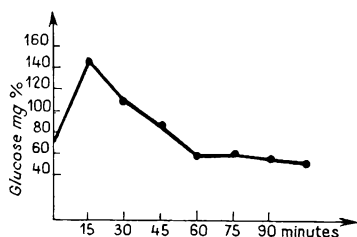


FIG. 137. — Evolution de la glycémie après injection intraveineuse rapide de $0,66 \text{ cm}^3$ de glucose à 50 % par kg. (D'après P. A. BASTENIE et V. CONARD, Essai d'interprétation des épreuves d'hyperglycémie provoquée, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1957, 2, 223.)

Conard et coll. ont montré que la partie descendante de la courbe correspondait à la captation du glucose par les tissus et que la décroissance

Suite de la note 2 p. 121.

qu'on peut écrire

$$\frac{dQ}{Q} = -\alpha \cdot dt$$

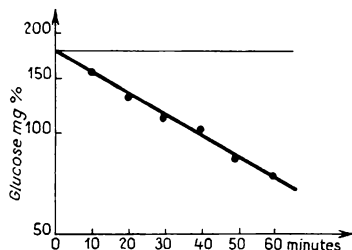
montre en effet que pour dt égal à l'unité, on a

$$\frac{dQ}{Q} = -\alpha.$$

de la glycémie pendant cette période se faisait suivant une loi exponentielle du type e^{-kx} ⁽¹⁾.

En coordonnées semi-logarithmiques, c'est-à-dire sur un graphique « logarithme des concentrations/temps », cette partie de la courbe s'anamorphose en une droite (fig. 138) dont la pente peut apporter des renseignements inté-

FIG. 138. — Représentation semi-logarithmique d'une épreuve d'hyperglycémie intraveineuse. (D'après BASTENIE et CONARD.)



ressants sur la capacité tissulaire de captation du glucose. En effet, plus cette captation tissulaire est importante, plus la décroissance de la glycémie se fera rapidement, plus la pente de la droite sera accusée, comme en témoigne le redressement de la droite lorsqu'on associe à l'épreuve l'administration d'insuline (fig. 139).

Inversement, bien entendu, plus la captation tissulaire de glucose sera faible, plus la décroissance de la glycémie sera lente et plus faible sera la pente de la droite semi-logarithmique.

Le coefficient angulaire K de cette droite fournit donc un indice quantitatif de la captation tissulaire du glucose, c'est-à-dire de « l'assimilation glucidique » : c'est « le coefficient d'assimilation glucidique » de Conard, Franckson et Bastenie, qui peut être exploité pour explorer en clinique la fonction endocrine du pancréas.

C'est ainsi que selon la valeur de la pente de la droite semi-logarithmique et le délai observé pour le retour de la glycémie aux valeurs initiales après administration d'une dose-test standardisée, on peut délimiter les secteurs correspondant respectivement (fig. 140) à une réponse « normale », une réponse « franchement diabétique » avec ralentissement du temps de disparition du glucose exogène, une réponse « suspecte de diabète » se situant à la

(1) CONARD, V., FRANCKSON, J. R. M., BASTENIE, P. A., KESTENS, J. et COVACS, L., « Etude critique du triangle d'hyperglycémie intraveineuse chez l'homme normal et détermination d'un coefficient d'assimilation glucidique », *Arch. internat. pharmacodyn.*, 1953, 93, 277.

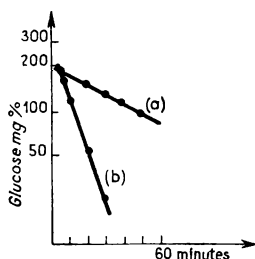


FIG. 139. — Représentation semi-logarithmique d'une épreuve d'hyperglycémie intraveineuse ordinaire (a) et combinée après administration d'insuline (b). (D'après BAS-TENIE et CONARD.)

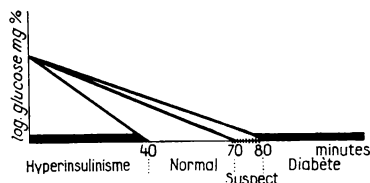


FIG. 140. — Représentation semi-logarithmique de l'épreuve d'hyperglycémie intraveineuse. Délimitation des secteurs normaux et pathologiques. (D'après M. DÉROT, Les diabètes sucrés inapparents, L'Hôpital, mars 1962.)

limite des deux secteurs ou, inversement, une réponse « hyperinsulinique » caractérisée par une disparition accélérée du glucose exogène (fig. 140).

* Période biologique et turn-over

La captation par les tissus de certains dérivés hormonaux comme la thyroxine ou la cortisone, se fait également en proportion constante de la quantité de substance présente dans le plasma.

Il en résulte que la disparition plasmatique de ces substances se fait également suivant une loi exponentielle.

Si donc l'on injecte par voie intraveineuse une quantité C_0 de substance à l'instant $t = 0$, la concentration C à l'instant t sera donnée par l'exponentielle

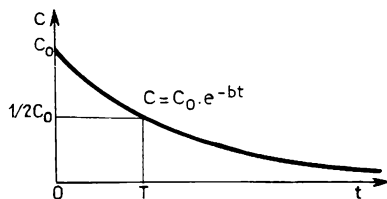


FIG. 141.

$$C = C_0 \cdot e^{-bt} \text{ (fig. 141).}$$

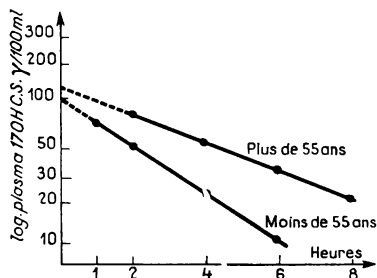
Le temps T qui correspond à la disparition de la moitié de la quantité initialement présente est la *période biologique* ou encore *demi-vie biologique* de la substance. On voit qu'elle est

exactement l'équivalent de la période radio-active.

Le coefficient b qui mesure la pente de l'exponentielle indique la proportion de substance consommée dans l'unité de temps : c'est le « *turn-over* » des Anglo-Saxons ou pourcentage de renouvellement par unité de temps.

En coordonnées semi-logarithmiques, l'exponentielle devient une droite dont la pente plus ou moins marquée renseigne sur la rapidité plus ou moins grande du métabolisme subi par l'hormone en question.

FIG. 142. — Evolution des taux plasmatiques des 17-Hydroxycorticostéroïdes après administration intraveineuse de cortisol dans un groupe de sujets normaux de 23 à 55 ans et dans un groupe de 66 à 92 ans. (D'après L. T. SAMUELS et col., *Hormones in blood, Colloquia on Endocrinology*, 1957, 11, 208.)



C'est ainsi que la pente de la droite semi-logarithmique obtenue après administration intraveineuse de cortisol est plus faible chez le vieillard que chez l'adulte, objectivant ainsi le ralentissement du métabolisme de cette hormone au cours du vieillissement (fig. 142).

* *Transit de la thyroxine marquée*

Cette propriété est mise à profit notamment pour réaliser un test d'exploration fonctionnelle du corps thyroïde : on injecte au sujet une certaine quantité de thyroxine marquée par l'iode 131. La courbe de disparition plasmatique de la thyroxine injectée peut être alors étudiée commodément en suivant l'évolution de la radio-activité du plasma.

On trouve ainsi chez le sujet normal une demi-vie biologique de six jours environ et un taux de renouvellement de l'ordre de 10 % par jour. Chez l'hyperthyroïdien, la consommation tissulaire est exagérée, la demi-vie biologique se raccourcit, le *turn-over* s'accélère : la pente de l'exponentielle s'accuse, comme l'objective bien la représentation semi-logarithmique (fig. 143). Inversement chez l'hypothyroïdien la consommation tissulaire diminue, la demi-

vie biologique s'allonge, le turn-over se ralentit : la pente de l'exponentielle s'atténue (fig. 143).

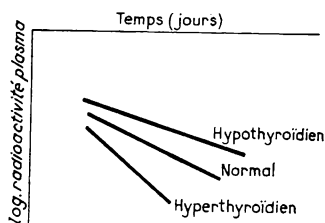


FIG. 143. — Transit « in vivo » de la thyroxine radio-active (schématisé).

Cette épreuve dite « du transit in vivo de la thyroxine radio-active », peut donc être utilisée pour apprécier le fonctionnement thyroïdien, notamment dans les cas où l'épreuve de fixation thyroïdienne de l'iode radio-actif, de réalisation plus simple, ne permet pas de résoudre le problème (cas de saturation glandulaire ou étude de l'état thyroïdien après administration thérapeutique d'iode radio-actif) ⁽¹⁾.

* Cinétique chimique exponentielle

La cinétique de certaines réactions chimiques, les réactions monomoléculaires non réversibles, c'est-à-dire celles où les corps en présence réagissent molécule par molécule, la réaction s'effectuant toujours dans le même sens jusqu'à épuisement du réactif, suit également une loi exponentielle.

Si en effet la concentration de l'un des corps réagissant A est négligeable par rapport à celle de l'autre corps réagissant B , la réaction ne « consommant » qu'une faible partie de ce dernier, la concentration de B peut être considérée comme pratiquement constante.

Dans ces conditions, le nombre dA de molécules de A qui réagissent, donc qui disparaissent dans l'intervalle dt , est proportionnel au nombre de molécules de A disponibles, c'est-à-dire présentes à ce moment, soit $[A]$

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A].$$

⁽¹⁾ STERLING, K., CHODOS, R. B., « Radiothyroxine turnover studies in myxoedema, thyreotoxicosis, and hypermetabolism without endocrine disease », *J. Clin. Invest.*, 1956, **35**, 806.

Il en résulte que la disparition de A se fait suivant une loi exponentielle décroissante (fig. 144).

$$A = A_0 \cdot e^{-kt} \quad (1).$$

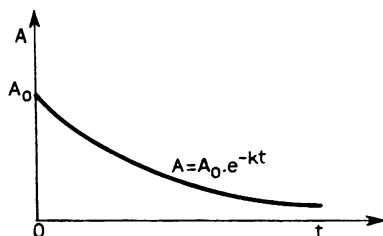


FIG. 144.

* Vidange exponentielle

La décroissance exponentielle s'observe également dans certains systèmes hydrauliques qui offrent des « modèles analogiques » commodes pour la compréhension de certains aspects de la fonction exponentielle.

Considérons par exemple le système constitué par un réservoir rempli de liquide et dont le fond est percé d'un orifice de dimension donnée (fig. 145).

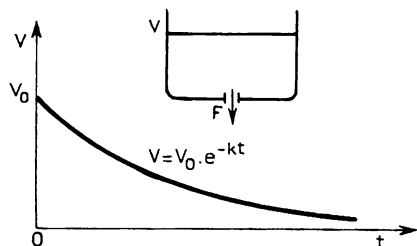


FIG. 145.

Le débit ou flux liquidien F à travers l'orifice est à chaque instant proportionnel à la pression, c'est-à-dire à la hauteur, donc (puisque la surface S du fond du récipient est constante), au volume de la colonne liquidienne susjacente.

Or le débit n'est pas autre chose que la variation dV/dt du volume V par rapport au temps t . Nous sommes donc dans le cas d'une grandeur (le volume) dont le taux de décroissance (dV/dt) est proportionnel à la valeur actuelle de cette grandeur ($dV/dt = -kV$), ce qui réalise, nous l'avons vu, les conditions de la décroissance exponentielle.

(1) Cette loi, on le remarquera, est aussi l'expression d'une probabilité statistique. Elle traduit en effet la constance, dans les conditions envisagées, pour un même intervalle de temps, de la probabilité de rencontre $d[A]/[A] = -k$ des molécules de A avec celles de B .

Les variations du volume V en fonction du temps t suivent donc une loi exponentielle de la forme

$$V = V_0 \cdot e^{-kt} \quad (1).$$

La courbe représentative de V en fonction de t est donc une exponentielle de pente k et dont l'ordonnée à l'origine est V_0 , qui correspond à la valeur du volume V au temps $t = 0$ (fig. 145).

Par analogie avec ce que nous avons vu pour λ , la pente k de cette exponentielle indique la fraction du volume initial qui disparaît dans l'unité de temps (2). C'est une constante caractéristique de l'orifice d'écoulement. Elle exprime la facilité plus ou moins grande avec laquelle le liquide s'écoule par l'orifice en question.

* Dilution exponentielle. Courbe de lavage

Considérons maintenant (fig. 146) une enceinte close munie de deux tubulures, l'une d'entrée, l'autre de sortie, permettant d'y établir un écoulement liquidien que nous supposerons à débit constant F .

Injectons dans la tubulure d'entrée une quantité connue q d'une substance dite « indicateur » sous un volume que nous supposerons négligeable par

(1) En effet, la relation

$$\frac{dV}{dt} = -kV$$

peut s'écrire

$$\frac{dV}{V} = -k dt,$$

équation différentielle qui conduit à la relation $V = V_0 \cdot e^{-kt}$.

(2) La relation

$$\frac{dV}{V} = -k \cdot dt$$

montre en effet que pour dt égal à l'unité,

$$\frac{dV}{V} = -k.$$

rapport au volume V de l'enceinte.

On peut montrer qu'à condition de faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (mélange instantané et homogène de l'indicateur, écoulement laminaire, etc.) la décroissance de la concentration C de l'indicateur en fonction du temps se fait suivant une exponentielle

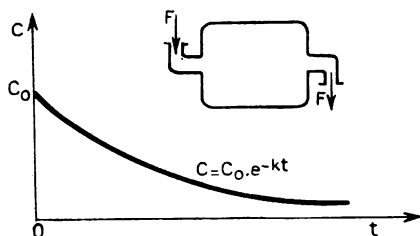


FIG. 146.

$$C = C_0 \cdot e^{-kt} \quad (1)$$

dite *exponentielle « de dilution »* ou encore *« de lavage »* (fig. 146).

Le coefficient k , qui est la pente de l'exponentielle, indique la fraction de la quantité initiale qui disparaît dans l'unité de temps ⁽²⁾.

Cette quantité est directement proportionnelle au débit F et inversement proportionnelle au volume V de l'enceinte (en effet plus le débit est grand et plus l'enceinte est réduite, plus vite elle sera « lavée de l'indicateur »). On a donc

$$k = \frac{F}{V}$$

⁽¹⁾ En effet, si l'indicateur est réparti de façon homogène, le flux liquidien entraîne à chaque instant dt un nombre dN de molécules proportionnel au nombre N de molécules d'indicateur présentes à cet instant

$$\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$$

équation différentielle qui conduit, selon le schéma habituel à l'exponentielle

$$N = N_0 \cdot e^{-kt}.$$

Il suffit alors de diviser par le volume V de la cavité pour passer aux concentrations.

⁽²⁾ En effet, l'équation

$$\frac{dN}{dt} = -k N$$

qu'on peut écrire

$$\frac{dN}{N} = -k \cdot dt$$

montre que pour dt égal à l'unité

$$\frac{dN}{N} = -k.$$

d'où la formulation

$$C = C_0 \cdot e^{-(F/V)t}$$

souvent adoptée pour l'exponentielle de dilution.

Cette courbe est exploitée en particulier pour calculer le débit cardiaque et le volume du ventricule droit.

En pratique, le mélange n'est pas instantané et il existe un pic initial de concentration qui traduit l'afflux de l'indicateur dans la cavité étudiée, et ce n'est que secondairement que se fait la décroissance de la concentration. De plus, celle-ci n'est pas rigoureusement exponentielle⁽¹⁾. Enfin, la concentration ne s'annule pas totalement, le traceur faisant retour par recirculation dans la cavité où la concentration se maintient à un niveau qui exprime la dilution finale de l'indicateur dans l'ensemble du système cardio-vasculaire⁽²⁾. D'où l'aspect de la courbe obtenue en pratique (fig. 147).

On reconnaît la courbe qui nous a servi à calculer précédemment le débit cardiaque selon la Méthode de Stewart-Hamilton. En effet, comme nous l'avons vu, le débit varie en raison inverse de la surface comprise sous la

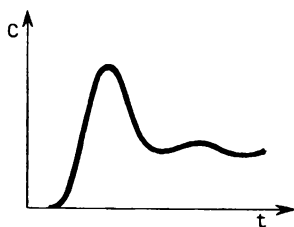


FIG. 147.

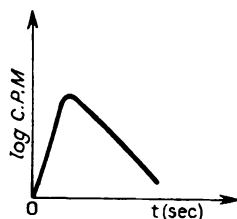


FIG. 148.

(1) En effet cela supposerait une cavité de volume constant, alimentée sous un débit constant. Or le volume cardiaque varie entre un minimum systolique et un maximum diastolique. De plus, par suite du jeu valvulaire, l'écoulement liquidien n'est pas continu. Selon Kellerson et de Vernejoul qui se sont particulièrement attachés à ce problème, la courbe réelle serait une courbe complexe s'inscrivant entre deux exponentielles correspondant, l'une au volume systolique, l'autre au volume diastolique (P. DE VERNEJOL et Col., « Mesure du débit cardiaque et des volumes ventriculaires par radio-cardiographie », *Rev. Franc. Etudes Clin. et Biol.*, 1964, IX, 693).

(2) L'utilisation de certains isotopes, comme le krypton 85 qui est pratiquement éliminé en totalité à son passage pulmonaire, permet cependant d'obtenir une courbe de lavage complète, non interrompue par la recirculation (DURAND, J. et COURNAND, A., « Emploi d'un isotope du krypton dans l'exploration fonctionnelle cardio-vasculaire et pulmonaire », *Rev. Fr. Etudes Clin. et Biol.*, 1962, 7, 411).

courbe de dilution et plus précisément sous la portion exponentielle de cette courbe.

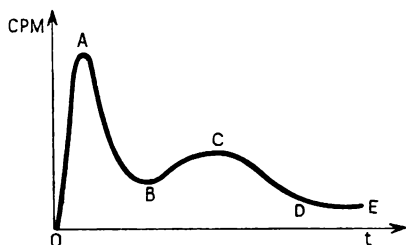
Sur un graphique semi-logarithmique (fig. 148), cette portion exponentielle de la courbe de dilution s'anamorphose en une droite dont la pente $k' = k \log e$ permet, le débit étant connu, de calculer le volume ventriculaire à partir de la relation $k = F/V$.

* Cardiogramme isotopique

Si, après injection d'une substance émettrice de rayons γ , comme l'albumine marquée à l'iode 131, on enregistre la radio-activité détectée par un compteur placé devant l'aire précordiale, on obtient une courbe dite « cardiogramme isotopique » dont les notions ci-dessous vont nous permettre de comprendre l'aspect (fig. 149).

La courbe comporte une première portion OAB qui n'est autre que la « courbe de lavage » du ventricule droit.

FIG. 149. — Radiocardiogramme (schématisique). (D'après P. DE VERNEJOL et coll., Mesure du débit cardiaque et des volumes ventriculaires par radiocardiographie, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1964, 9, 693.)



Mais le traceur qui s'est évacué par l'artère pulmonaire revient ensuite par les veines pulmonaires injecter les cavités gauches dont la courbe de lavage s'inscrit alors sur le tracé en BCD , jusqu'au moment D où le traceur est ramené au cœur par recirculation. Après quoi, la radio-activité ne s'abaisse que très légèrement pour finalement se stabiliser en un plateau DE dont la hauteur exprime la dilution finale du traceur (fig. 149).

Ce cardiogramme isotopique apporte des données intéressantes sur la dynamique circulatoire au niveau du cœur. En particulier sur la vidange des cavités droites et gauches qui s'exprime par les segments AB et CD du cardiogramme isotopique. On conçoit en effet que la décroissance de la radio-

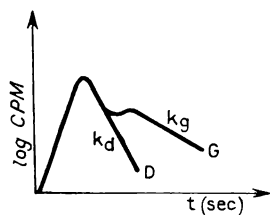


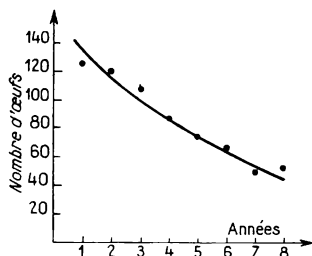
FIG. 150.

activité que traduisent ces portions de la courbe sera d'autant plus marquée que la vidange sera meilleure et inversement. Il est donc possible d'apprécier la dynamique de vidange des cavités cardiaques par la décroissance plus ou moins rapide des exponentielles correspondantes, c'est-à-dire par les pentes k_d et k_g de ces exponentielles obtenues en représentant la courbe en coordonnées semi-logarithmiques (fig. 150).

* Autres exemples de décroissance exponentielle

La loi de décroissance exponentielle, dont nous venons de voir un certain nombre d'exemples, se rencontre encore dans les domaines les plus variés de la biologie : c'est ainsi que la décroissance annuelle de la ponte chez certains animaux, en particulier la poule, suivrait une loi sensiblement exponentielle ⁽¹⁾ (fig. 151). Le nombre d'œufs pondus chaque année repré-

FIG. 151. — Décroissance annuelle de la ponte chez la poule. (D'après FAURÉ-FREMIET, *Annales de Physiologie et de Physico-chimie biologique*, 1928, 1, 64.)



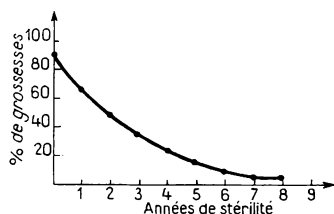
senterait donc une fraction constante du nombre d'ovocytes disponibles à ce moment, ce qui tendrait à faire penser que la probabilité de transformation des ovocytes en œuf reste constante, la décroissance annuelle de la ponte traduisant simplement la diminution progressive, du fait même de la ponte, du stock des ovocytes.

Il est tentant de rapprocher de ces faits les observations montrant que

⁽¹⁾ FAURÉ-FREMIET, *Annales de physiologie et de physico-chimie biologique*, 1928, 1, p. 64.

chez les couples stériles, les chances de grossesse diminuent avec l'ancienneté de la stérilité suivant une courbe qui évoque une décroissance exponentielle (fig. 152).

FIG. 152. — Probabilité de grossesse en fonction de l'ancienneté de la stérilité. (D'après C. G. HARTMAN, *Science and the Safe Period*, Williams Wilkins, Baltimore, 1962.)



Notons enfin que les courbes de survie observées dans certaines affections peuvent parfois revêtir une allure exponentielle, comme en témoigne le caractère linéaire de leur tracé sur un graphique semi-logarithmique (fig. 153).

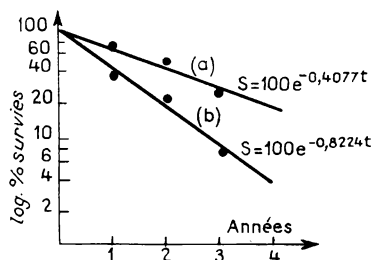


FIG. 153. — Courbes de survie dans les cirrhoses du foie (a) selon Patek et Baker; (b) selon Garceau et Chalmers. (D'après P. PIZON, *La Presse médicale*, 1964, 72, 1648.)

Mais on rencontre aussi, bien entendu, la loi de décroissance exponentielle en dehors de la biologie proprement dite, et en particulier la physique en offre des exemples bien connus :

Ainsi, la décharge apériodique d'un condensateur se fait suivant une loi exponentielle en fonction du temps. Si C est la capacité du condensateur, R la résistance du circuit dans lequel il se décharge, Q_0 la quantité d'électricité présente initialement sur ses faces, on montre que la quantité d'électricité présente à l'instant t est donnée par l'expression

$$Q_t = Q_0 \cdot e^{-t/RC}.$$

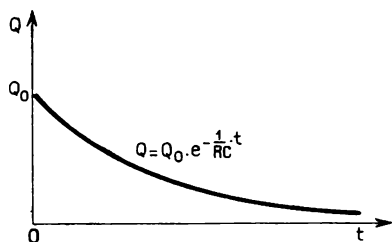


FIG. 154.

La courbe représentative de Q en fonction du temps est donc une exponentielle décroissante de pente $1/RC$ (fig. 154).

Le refroidissement d'un corps chaud est également une fonction exponentielle du temps (Loi de Newton) : si l'on appelle H l'excès primitif de température du corps chaud sur les corps

environnants, l'excès H_t de température au temps t sera donné par l'expression

$$H_t = H_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

α étant une constante dépendant de certaines caractéristiques du corps envisagé.

De même, la pression atmosphérique est une fonction exponentielle de l'altitude, l'amortissement de l'amplitude des mouvements d'un ressort après élongation est également une fonction exponentielle du temps, etc.

* Constante de temps

Lorsque, comme dans la plupart des exemples précédents, la variable indépendante est le temps, on définit ce que l'on appelle la constante de temps θ , représentée par l'inverse du facteur k de l'exponentielle :

$$\theta = \frac{1}{k}$$

d'où

$$k = \frac{1}{\theta}.$$

L'exponentielle peut donc se mettre sous la forme

$$e^{-t/\theta}.$$

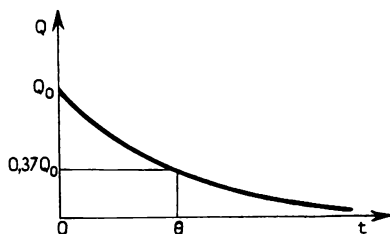


FIG. 155.

Pour $t = \theta$, l'exponentielle devient égale à e^{-1} , c'est-à-dire à $1/e \simeq 0,37$. θ représente donc le temps au bout duquel la quantité étudiée est réduite à sa $1/e^e$ partie, soit à un peu plus du tiers de sa valeur initiale (fig. 155).

CHAPITRE XI

EXPONENTIELLE DITE « ASCENDANTE » ET SES APPLICATIONS EN BIOLOGIE

Nous allons maintenant étudier un autre type de courbe qu'on peut faire dériver de l'exponentielle décroissante et qui a également de nombreuses applications en biologie, c'est l'exponentielle dite « ascendante » qui répond à l'équation

$$y = 1 - e^{-kx}.$$

Courbe représentative de $y = 1 - e^{-kx}$

Cette fonction est le complément à 1 de la fonction e^{-kx} dont la courbe représentative, nous l'avons vu, coupe Oy au point d'ordonnée $+1$.

Traçons l'horizontale H passant ce point (fig. 156). Soit M un point de l'exponentielle e^{-kx} . L'ordonnée MM' coupe l'horizontale H en L .

La figure montre que si $MM' = e^{-kx}$, on a $ML = 1 - e^{-kx}$.

ML , c'est-à-dire la partie de l'ordonnée de M située au-dessus de la courbe e^{-kx} , mesure donc la valeur de l'ordonnée cherchée, soit $y = 1 - e^{-kx}$.

Pour obtenir le point N correspondant de cette courbe, il suffira donc de porter sur l'ordonnée de M , à partir de M' , une longueur $M'N$ égale à $ML = 1 - e^{-kx}$.

Par construction, ce point N est symétrique de M par rapport au milieu de $M'L$.

Si on répète ce raisonnement pour tous les points de la courbe e^{-kx} , on voit que la courbe $1 - e^{-kx}$ sera symétrique de la courbe e^{-kx} par rapport à

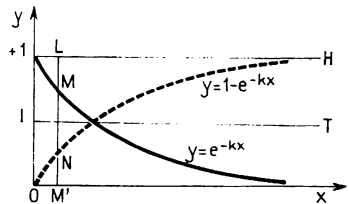


FIG. 156.

la médiatrice IT de l'ordonnée $+1$: c'est une exponentielle « renversée » qui part du point O , suit un trajet ascendant, pour devenir finalement asymptote à l'horizontale H (fig. 156). D'où le nom d'exponentielle « ascendante » sous lequel on la désigne parfois (« build-up curve » des Anglo-Saxons).

Forme générale de l'exponentielle ascendante

Dans la forme générale de l'exponentielle ascendante les ordonnées sont multipliées par un coefficient constant A :

$$y = A(1 - e^{-kx})$$

Pour obtenir sa courbe représentative, il suffit donc de faire subir à la courbe représentative de $1 - e^{-kx}$ une « dilatation » verticale de module A .

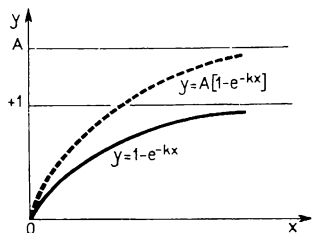


FIG. 157.

La courbe obtenue est une exponentielle ascendante qui admet pour asymptote l'horizontale d'ordonnée A (fig. 157).

Remarquons que pour x infini le terme e^{-kx} , c'est-à-dire $1/e^{kx}$, tend vers zéro et par suite y tend vers A , comme le montre du reste la courbe. A peut donc être considéré comme la valeur que prend y pour x infini, soit y_{∞} .

C'est pourquoi l'on écrit parfois l'équation générale de l'exponentielle ascendante sous la forme :

$$y = y_{\infty}(1 - e^{-kx})$$

Représentation semi-logarithmique de l'exponentielle ascendante

De l'équation

$$y = y_{\infty}(1 - e^{-kx})$$

on tire

$$y_{\infty} - y = y_{\infty} \cdot e^{-kx}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres, il vient :

$$\log (y_{\infty} - y) = \log y_{\infty} - k x \cdot \log e .$$

Posons $k \cdot \log e = k'$, on a

$$\log (y_{\infty} - y) = \log y_{\infty} - k' x$$

Sous cette forme, on voit si l'on porte en ordonnées, non pas $\log y$, mais les logarithmes des différences $(y_{\infty} - y)$, on obtient une droite descendante de pente k' qui coupe l'axe des y au point d'ordonnée $\log y_{\infty}$ (fig. 158).

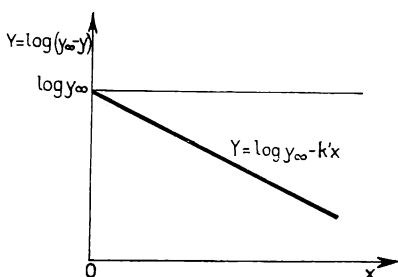
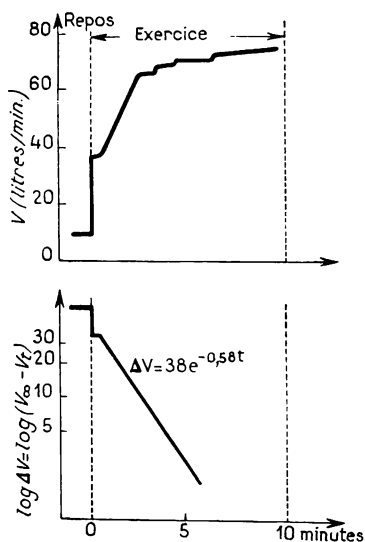


FIG. 158.

FIG. 159. — Evolution du débit ventilatoire V au repos et pendant l'exercice. En bas, représentation semi-logarithmique. (D'après P. DEJOURS et A. TEILLAC, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1963, 8, 430.)



En coordonnées semi-logarithmiques et avec les conventions ci-dessus, l'exponentielle dite « ascendante » est donc transformée en une droite *descendante* de pente $k' = k \log e$ et qui coupe l'axe des y au point d'ordonnée y_{∞} . C'est souvent sous cette forme un peu déroutante au premier abord qu'on représente l'exponentielle ascendante (fig. 159). En réalité ce mode de représentation rend bien compte des deux éléments caractéristiques de l'exponentielle ascendante, à savoir le niveau du « plateau », qui est fourni par l'ordonnée de y_{∞} et, d'autre part, la pente à l'origine soit $k' = k \log e$ qui n'est autre que celle de l'exponentielle décroissante correspondante.

*** Exponentielles ascendantes « complémentaires »
d'une décroissance exponentielle**

La genèse mathématique de la fonction $1 - e^{-kx}$ nous permet de comprendre qu'on rencontrera cette fonction chaque fois que l'apparition d'une substance est complémentaire de sa disparition suivant une décroissance exponentielle.

Il en est ainsi par exemple *dans certaines transformations radio-actives* lorsque la désintégration d'une substance radio-active A aboutit en totalité à la formation d'un produit B , lui-même non radio-actif. La quantité totale de B qui s'est formée à un instant donné t_1 par exemple est exactement égale à la quantité totale de A qui a disparu à cet instant. Celle-ci, qui est le complément de la quantité de A restante, est mesurée par le segment d'ordonnée ML susjacent à l'exponentielle décroissante de la désintégration radio-active (fig. 160). Il en résulte que la formation de B se fera suivant une exponentielle ascendante (fig. 160, courbe en pointillés).

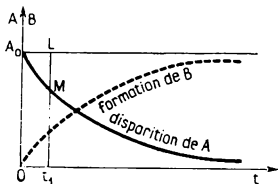


FIG. 160.

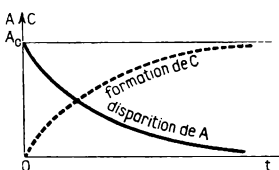


FIG. 161.

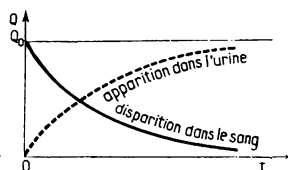


FIG. 162.

Il en est de même dans *la cinétique des réactions monomoléculaires non réversibles*. Nous avons vu en effet que dans ces cas la concentration de l'un des corps réagissant (B) étant pratiquement constante, la disparition de l'autre (A) se faisait suivant le mode exponentiel. Il en résulte que la formation du produit final (C), qui est complémentaire de la disparition de A , se fera, comme précédemment, suivant une exponentielle ascendante (fig. 161).

De même *dans le cas où une substance est éliminée essentiellement par voie rénale*, si sa disparition plasmatique suit une loi exponentielle, son apparition dans l'urine se fera suivant une exponentielle ascendante (fig. 162).

Modèle analogique de l'exponentielle ascendante

Considérons (fig. 163) un réservoir dont le fond est percé d'un orifice O , comme celui qui nous a servi pour établir le modèle analogique de l'exponentielle décroissante.

Supposons que ce réservoir soit alimenté par une tubulure T sous un débit constant de F ml/mn.

Au début le réservoir est vide. Lorsqu'on ouvre la tubulure T , le réservoir se remplit. Mais aussitôt le liquide commence à sortir par O . Le débit de sortie ϕ , d'abord faible, va augmenter à mesure que le niveau s'élève dans le réservoir. Ceci jusqu'à ce qu'il devienne exactement égal au débit d'entrée F . A ce moment la quantité de liquide qui entre à chaque instant dans le réservoir est exactement compensée par la quantité de liquide qui en sort à cet instant et le niveau liquidien se fixe à un niveau d'équilibre correspondant à un volume final V_f .

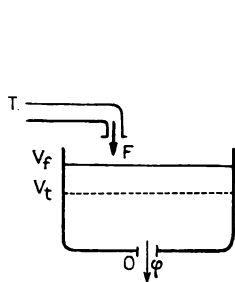


FIG. 163.

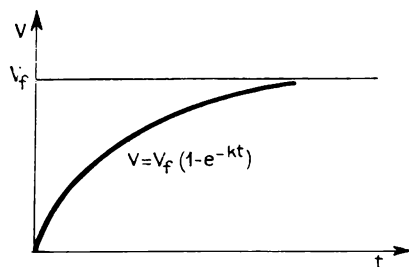


FIG. 164.

On peut considérer qu'à l'instant t le volume V_t atteint par le liquide dans le réservoir diffère du volume final V_f d'une quantité $V_f - V_t$ correspondant au volume qui se serait écoulé pendant le même temps si l'on était parti du volume V_f . Or dans ce cas, le volume écoulé serait, nous l'avons vu, $V_f \cdot e^{-kt}$.

On a donc

$$V_f - V_t = V_f \cdot e^{-kt}$$

C'est-à-dire

$$V_t = V_f (1 - e^{-kt}).$$

La courbe représentative de V en fonction du temps est donc une exponentielle ascendante admettant V_f comme asymptote horizontale (fig. 164).

Elle montre que le volume V tend asymptotiquement vers le volume d'équilibre V_f (fig. 164).

* Exponentielles ascendantes des équilibres dynamiques

Ce modèle analogue permet de comprendre que l'on rencontre également l'exponentielle ascendante dans des circonstances qui conduisent à un état d'équilibre dynamique.

Il en est ainsi par exemple *quand un radio-isotope est formé à un taux constant* dans un réacteur nucléaire : la radio-activité augmente jusqu'à ce que le taux de disparition par désintégration radio-active devienne exactement égal au taux de formation. A ce moment est atteint un niveau d'équilibre qui correspond à l'activité dite « de saturation » A_s (fig. 165).

Un système analogue est réalisé par *les perfusions à débit constant* :

Perfusions par exemple, à débit constant, dans le courant circulatoire, une substance comme l'inuline. Sa concentration plasmatique, nulle au départ, va s'élever. Mais à mesure que l'inuline parvient au niveau du rein, celui-ci l'élimine à un taux proportionnel à sa concentration. Celle-ci va donc aug-

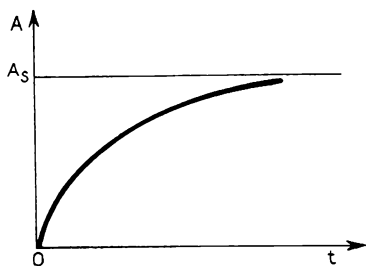


FIG. 165.

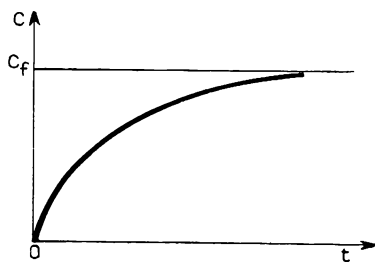


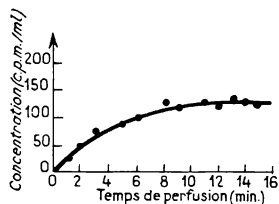
FIG. 166.

menter, de moins en moins, jusqu'à ce que le débit de l'épuration rénale vienne équilibrer exactement celui de la perfusion. A ce moment, la concentration plasmatique C se stabilise à sa valeur finale C_f . La courbe en fonction du temps de la concentration plasmatique est une exponentielle ascendante admettant la droite d'ordonnée C_f comme asymptote horizontale (fig. 166). On conçoit que l'équilibre sera atteint d'autant plus rapidement que l'épuration

rénale est plus active. La pente de l'exponentielle renseigne donc sur l'efficacité de l'épuration rénale vis-à-vis de la substance considérée.

Cette particularité des perfusions à débit constant est également mise à profit dans *certaines études cardio-vasculaires*. Par exemple pour l'étude du débit cardiaque, au lieu de faire une injection unique et brusque de l'indicateur aboutissant, comme nous l'avons vu, à une courbe de lavage, on peut réaliser une perfusion lente à débit constant en amont du ventricule droit. La courbe en fonction du temps des concentrations de l'indicateur au niveau de la cavité étudiée, ici le ventricule droit, prend alors l'allure d'une exponentielle ascendante (fig. 167).

FIG. 167. — *Perfusion lente à débit constant d'une solution Kr 85 dans l'artère pulmonaire. Evolution de la radioactivité au niveau du ventricule droit. (D'après J. DURANT et A. COURNAND, Rev. Fr. Etudes Clin. Biol., 1962, 7, 411.)*



Le plateau d'équilibre sera atteint d'autant plus rapidement, on le conçoit, que le débit ventriculaire sera plus important. On peut donc apprécier ce dernier par la pente de l'exponentielle ascendante obtenue.

* *Courbe d'activation du lit capillaire périphérique*

Si, après injection intravasculaire d'une substance marquée émettrice de rayons γ et dont la molécule est suffisamment volumineuse pour ne pas quitter le compartiment vasculaire, comme c'est le cas pour la sérum-albumine marquée à l'iode 131, on enregistre en fonction du temps la radio-activité détectée en regard d'une zone capillaire donnée, par exemple la plante des pieds pour le membre inférieur, on obtient une courbe dite « courbe d'activation du lit capillaire périphérique » qu'il est possible de faire rentrer également dans le cadre que nous venons d'examiner.

Cette courbe exprime en effet « l'activation » du lit capillaire dans la zone étudiée, c'est-à-dire la façon dont le plasma qui remplissait initialement ce lit capillaire est remplacé progressivement par du plasma contenant la subs-

tance marquée : la radio-activité, initialement nulle, augmente dans la zone « regardée » par le compteur au fur et à mesure qu'un nombre de plus en plus grand de capillaires se vident de leur plasma « inactif » pour se remplir de plasma « activé ». Lorsque tous les capillaires du lit étudié ont été activés, la radio-activité n'augmente plus et se stabilise en plateau. Si A_p est l'activité (exprimée en coups/minutes) au niveau du plateau, on montre que l'activité A est donnée en fonction du temps t par l'expression

$$A = A_p (1 - e^{-kt}).$$

Sa courbe est donc une exponentielle ascendante admettant pour asymptote l'horizontale d'ordonnée A_p (fig. 168).

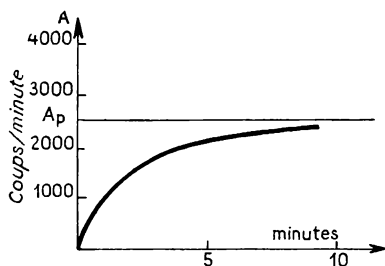


FIG. 168. — Courbe d'activation du lit capillaire périphérique.

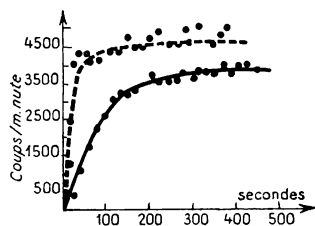


FIG. 169. — Courbes d'activation du lit capillaire périphérique. En trait plein : pied normal ; en pointillés, courbe obtenue après vaso-dilatation.

Le niveau A_p du plateau est fonction du volume du lit capillaire étudié, et il est d'autant plus élevé, bien entendu, que ce volume est plus important.

Par ailleurs, on conçoit que pour un volume donné du lit capillaire, l'activation complète sera obtenue d'autant plus rapidement que le flux circulatoire est plus important. La rapidité plus ou moins grande avec laquelle est atteint le plateau d'équilibre, c'est-à-dire la pente de l'exponentielle ascendante, renseigne donc également sur l'activité circulatoire. Ces deux données, pente de la courbe et niveau du plateau d'équilibre, convergent du reste pour l'appréciation de l'activité circulatoire du lit capillaire étudié : ainsi, en cas de vaso-dilatation, la courbe s'élèvera plus rapidement et le niveau du plateau d'équilibre sera plus élevé (fig. 169).

Intégrale de la fonction $y = e^{-kx}$

Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise sous la courbe $y = e^{-kx}$ depuis l'ordonnée à l'origine jusqu'à l'ordonnée correspondant à l'abscisse x (surface S de la figure 170).

C'est par définition l'intégrale

$$\int_0^x e^{-kx} \cdot dx.$$

Nous devons donc trouver une fonction qui admette $y = e^{-kx}$ comme dérivée.

Nous avons vu que la dérivée de $y = e^{-kx}$ était $-ky$, c'est-à-dire $-k \cdot e^{-kx}$. Si donc nous voulons obtenir comme dérivée non pas $-k \cdot e^{-kx}$ mais e^{-kx} , nous devons partir, non pas de e^{-kx} , mais d'une exponentielle k fois plus petite et négative, c'est-à-dire multiplier e^{-kx} par $-1/k$.

L'intégrale cherchée sera donc de la forme

$$-\frac{1}{k} \cdot e^{-kx}$$

à laquelle nous devons ajouter une constante d'intégration qui reste à déterminer :

$$\text{Intégrale de } e^{-kx} = -\frac{1}{k} \cdot e^{-kx} + C^{\text{te}}.$$

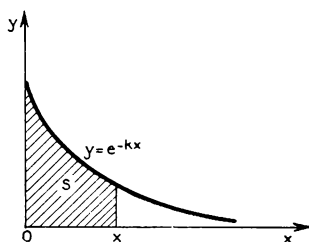


FIG. 170.

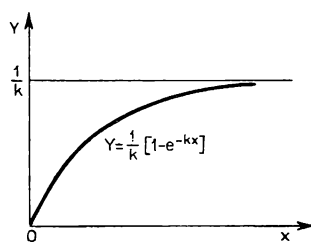


FIG. 171.

Pour trouver la valeur de la constante, il faut se placer dans les conditions initiales, c'est-à-dire ici faire $x = 0$.

Dans ces conditions, la figure montre que l'intégrale est alors nulle. On a donc

$$-\frac{1}{k} \cdot e^0 + C^{te} = 0$$

d'où

$$C^{te} = \frac{1}{k}.$$

L'intégrale cherchée est donc finalement

$$-\frac{1}{k} \cdot e^{-kx} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}(1 - e^{-kx})$$

$$\boxed{\int_0^x e^{-kx} \cdot dx = \frac{1}{k}(1 - e^{-kx})}$$

L'intégrale cherchée est donc une exponentielle ascendante de type $1 - e^{-kx}$ admettant pour asymptote horizontale la droite $y = 1/k$ (fig. 171).

Ainsi, l'exponentielle décroissante e^{-kx} a pour intégrale une exponentielle « ascendante » de type $1 - e^{-kx}$ (1).

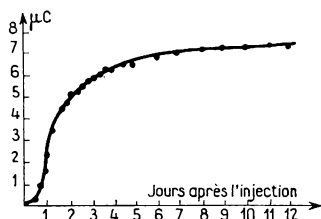


FIG. 172. — Courbe cumulée de la radioactivité urinaire après administration de progestérone marquée. (D'après DAVIS et PLOTZ, *Recent Progress in hormone research*, 1957, 13, 347.)

(1) C'est ce qui explique l'aspect de certaines exponentielles ascendantes que nous avons étudiées. Il en est ainsi notamment de la courbe d'activation du lit capillaire. En effet la courbe recueillie dans ces conditions n'est pas une courbe de concentration mais une courbe d'activité, c'est-à-dire le produit de la concentration par un facteur ayant les dimensions d'un volume. Le volume en question fait lui-même la somme intégrale des composants infinitésimaux du volume de dilution vus par le détecteur. La courbe d'activation est donc en fait une courbe intégrale, d'où son allure d'exponentielle ascendante.

Il en est de même de l'exponentielle ascendante observée dans l'élimination urinaire. Elle concerne non pas la concentration instantanée mais la quantité totale cumulée, c'est-à-dire la somme intégrale faite pour chaque instant t des quantités élémentaires dQ de produit Q qui sont apparues dans l'urine jusqu'à l'instant t , soit

$$\int_0^t dQ$$

D'où son allure d'exponentielle ascendante (fig. 172).

* Dose totale délivrée par un radio-élément

La désintégration d'un radio-élément aboutit à libérer une certaine dose de radio-activité. La dose totale de radio-activité à l'instant t correspond au nombre *total* d'atomes qui se sont désintégrés depuis le début jusqu'à cet instant t .

Le nombre d'atomes qui se sont désintégrés dans l'intervalle infiniment petit dt est dN . Pour avoir le nombre total d'atomes qui se sont désintégrés depuis le début jusqu'à l'instant t , c'est-à-dire la dose totale correspondant à l'instant t soit DT_t , il faut donc faire la somme intégrale de dN , soit N , pour tous les intervalles dt , depuis le temps zéro jusqu'au temps t , c'est-à-dire intégrer N par rapport au temps de 0 à t . L'intégrale cherchée sera donc

$$\int_0^t N \cdot dt.$$

C'est-à-dire, puisque $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

$$\int_0^t N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot dt.$$

C'est-à-dire, puisque N_0 est constant,

$$N_0 \int_0^t e^{-\lambda t} \cdot dt.$$

Mais cette intégrale nous est connue. D'après ce que nous venons de voir au paragraphe précédent, en effet,

$$\int_0^t e^{-\lambda t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}).$$

La dose totale à l'instant t sera donc

$$DT_t = \frac{N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

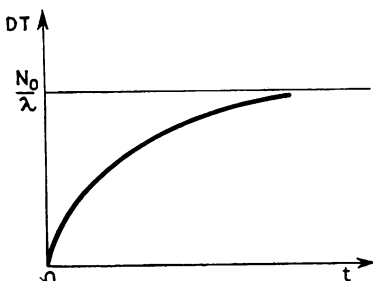


FIG. 173.

La courbe représentative de la dose totale en fonction du temps est donc une exponentielle ascendante du type $(1 - e^{-\lambda x})$ admettant pour asymptote l'horizontale d'ordonnée N_0/λ (fig. 173).

Elle montre que la dose augmente de plus en plus lentement jusqu'à une limite représentée par l'ordonnée N_0/λ qui correspond à t infini ⁽¹⁾.

N_0/λ correspond donc à la dose totale délivrée par le radio-élément après désintégration complète.

* Vie moyenne d'un atome radio-actif

La dose totale délivrée par un radio-élément après désintégration complète n'est atteinte, on le voit, qu'au bout d'un temps infini. Cela tient à ce que le nombre N d'atomes du radio-élément diminue de façon exponentielle et que par suite il ne devient nul (c'est-à-dire que le dernier atome du radio-élément ne se désintègrera) qu'au bout d'un temps infini.

On a donc été amené à se demander quel serait le temps au bout duquel la dose totale correspondant à la désintégration complète du radio-élément serait atteinte si le nombre d'atomes du radio-élément restait toujours le même, soit N_0 . Ce temps est appelé *vie moyenne* du radio-élément ⁽²⁾. On le symbolise par la lettre grecque τ .

La dose délivrée par les N_0 atomes du radio-élément pendant le temps τ serait évidemment $N_0\tau$. Par hypothèse, elle est égale à la dose totale N_0/λ obtenue après désintégration complète.

On a donc

$$N_0\tau = \frac{N_0}{\lambda}$$

d'où

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

La vie moyenne est donc l'inverse de la constante de désintégration radio-active.

(1) Pour t_∞ , on vérifie du reste que le terme $e^{-\lambda t}$ tend vers zéro et l'expression de DT se réduit à N_0/λ .

(2) A ne pas confondre avec la *demi-vie* laquelle correspond, nous l'avons vu, à la période physique du radio-élément.

Au bout du temps τ , le nombre d'atomes restant est

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda(1/\lambda)} = N_0 \cdot e^{-1} = \frac{N_0}{e} \simeq \frac{N_0}{3}.$$

La vie moyenne, on le voit, est l'équivalent de « la constante de temps » : au bout de ce temps, il reste seulement un tiers environ des atomes initialement présents, c'est-à-dire que deux tiers environ des atomes initiaux se sont désintégrés.

On peut en déduire que la vie moyenne est un peu supérieure à la période radio-active T qui correspond, nous le savons, à la désintégration de la moitié seulement des atomes initiaux (fig. 174).

Plus précisément, la relation

$$T = \frac{0,693}{\lambda}$$

indique que

$$\frac{1}{\lambda} \text{ (c'est-à-dire } \tau) = \frac{T}{0,693} \neq 1,44 T.$$

La vie moyenne est donc approximativement égale à une fois et demie la période radio-active.

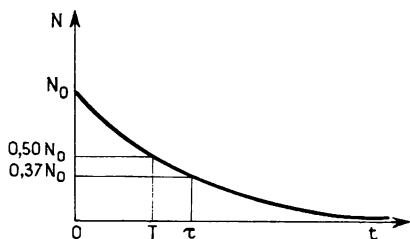


FIG. 174.

CHAPITRE XII

FONCTIONS AVEC UN OU PLUSIEURS TERMES EXPONENTIELS

Un terme exponentiel du type e^{-kx} ou $1 - e^{-kx}$ peut s'associer avec un ou plusieurs termes eux-mêmes exponentiels ou non. Nous allons envisager ici quelques-unes de ces éventualités parmi les plus fréquemment rencontrées en biologie.

Terme exponentiel associé à un terme constant

La forme générale de ce type de fonction est donnée par l'expression

$$y = y_0 + A \cdot e^{-kx}$$

où y_0 est une constante

Pour obtenir son tracé, il suffit donc d'ajouter à chaque instant à la fonction $A \cdot e^{-kx}$ la grandeur y_0 , c'est-à-dire de décaler vers le haut l'exponentielle $A \cdot e^{-kx}$ de la quantité y_0 .

La courbe cherchée est donc une exponentielle du type $A \cdot e^{-kx}$ admettant pour asymptote, non plus l'axe des x , mais l'horizontale d'ordonnée y_0 (fig. 175) ⁽¹⁾.

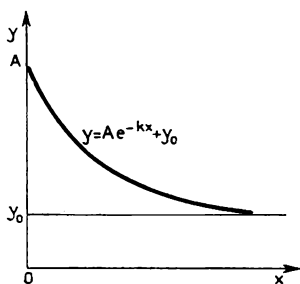


FIG. 175.

⁽¹⁾ On voit que pour x infini, le terme exponentiel tend vers zéro et la fonction se réduit alors au terme constant y_0 qui en constitue donc la limite. Aussi écrit-on parfois ce type de fonction sous la forme

$$y = y_{\text{lim}} + A \cdot e^{-kx}.$$

*** Courbe de disparition plasmatique de la B.S.P.
après ligature du cholédoque**

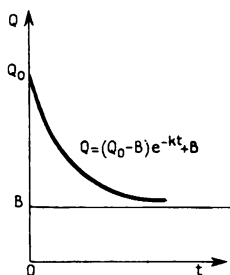
Nous avons vu que l'épuration plasmatique de la Bromo-sulphone-phtaléine (BSP), qui est éliminée par le foie dans les voies biliaires se fait suivant une exponentielle décroissante du type $Q = Q_0 \cdot e^{-kt}$.

Si, chez l'animal, on ligature le cholédoque, une partie du produit repasse dans le compartiment plasmatique jusqu'à ce qu'un équilibre s'établisse entre les concentrations de ces deux compartiments.

On montre que la courbe de disparition plasmatique de la BSP a alors pour équation

$$Q = (Q_0 - B) e^{-kt} + B.$$

FIG. 176. — Courbe d'élimination plasmatique de la BSP dans le cas d'obstruction complète de la voie biliaire. (D'après F. BEGON et C. BOHUON, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1965, 10, 73.)



C'est donc une exponentielle décroissante du type que nous venons d'étudier admettant pour asymptote l'horizontale d'ordonnée B (fig. 176). Celle-ci objective la rétention biliaire due à la ligature. On en déduit que l'excrétion de la BSP est en fait une sécrétion-réabsorption qui est fonction du « gradient bilio-plasmatique » ⁽¹⁾.

Terme exponentiel négatif.

*** Coefficient d'assimilation glucidique sous insuline**

Si le facteur A de l'exponentielle est négatif, remarquons-le, il y a lieu non plus d'ajouter, mais de retrancher à chaque instant de y_0 la valeur de

⁽¹⁾ BEGON, F. et BOHUON, C., « Etude expérimentale de l'élimination de la BSP chez le lapin », *Rev. Fr. Etudes Clin. et Biol.*, 1965, X, 73-78.

l'exponentielle. Ceci s'obtient très simplement en traçant la symétrique de $A \cdot e^{-kx}$ par rapport à l'horizontale y_0 (fig. 177).

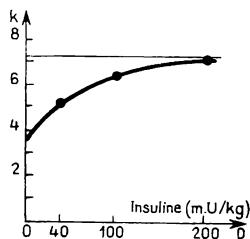
Citons comme exemple de ce type de fonction la variation du coefficient d'assimilation glucidique sous insuline.

Nous avons vu que l'administration conjointe d'insuline au cours de l'épreuve d'hyperglycémie intraveineuse entraînait une élévation du coefficient d'assimilation glucidique K . On conçoit que cette augmentation du coefficient K soit fonction de la dose d'insuline administrée. Selon Franckson ⁽¹⁾ le coefficient d'assimilation glucidique sous insuline K_i serait donné en fonction de la dose D d'insuline par une expression de la forme :

$$K_i = K_{\text{lim}} - A \cdot e^{-\alpha D}.$$

La courbe représentative de K_i en fonction de D est donc une exponentielle « retournée » admettant pour asymptote l'horizontale d'ordonnée K_{lim}

FIG. 178. — Variation du coefficient d'assimilation glucidique K en fonction de la dose d'insuline. (D'après H. LOEB et coll., *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1963, 8, 374.)



(fig. 178). Elle montre que la valeur du coefficient d'assimilation glucidique augmente avec la dose d'insuline mais que cette augmentation n'est pas proportionnelle à la quantité d'insuline administrée. Elle est de moins en moins marquée à mesure que la dose d'insuline augmente et elle tend vers une limite au-delà de laquelle le coefficient K n'augmente plus même si les doses d'insuline deviennent très grandes.

(1) FRANCKSON, J. R. M., *Mesure de l'activité de l'insuline chez l'homme. Analyse de l'épreuve d'hyperglycémie* (1 vol., Bruxelles, 1958, Acta Medica Belgica, éd.).

Terme exponentiel associé à un terme linéaire

Ce type de fonction a pour expression générale

$$y = A \cdot e^{-kx} + Bx.$$

Pour $x = 0$ le terme linéaire s'annule et le terme exponentiel se réduit à A .

Pour x infini en revanche, le terme exponentiel tend vers zéro et la fonction se confond avec la droite Bx .

Par suite, la courbe représentative coupe l'ordonnée à l'origine au point d'ordonnée A et admet la droite Bx comme asymptote (fig. 179).

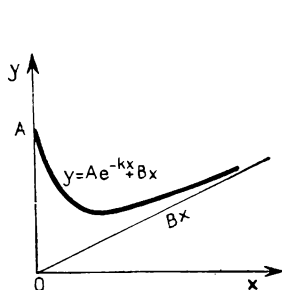


FIG. 179.

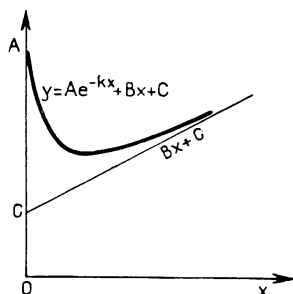


FIG. 180.

Bien entendu, la fonction peut également comporter un terme constant C :

$$y = A \cdot e^{-kx} + Bx + C.$$

Elle admet alors pour asymptote la droite $Bx + C$ (fig. 180).

*** Régulation par action intégrale**

Une fonction de ce type se rencontre dans certaines boucles de régulation physiologique.

C'est ainsi que selon Mazabraud⁽¹⁾, dans un système de régulation du

⁽¹⁾ MAZABRAUD, J., « Analyse d'une boucle de régulation physiologique », *Rev. Fr. Etudes Clin. et Biol.*, 1961, 6, 997-1005.

type dit « par action intégrale », l'évolution en fonction du temps de la grandeur dite « réglante » Y_r serait donnée par l'expression

$$Y_r = k_2 Z_0 t + \frac{k_2}{k_1} Z_0 \cdot e^{-k_1 t} - \frac{k_2}{k_1} Z_0$$

où Z_0 représente la quantité de substance perturbatrice administrée.

Pour $t = 0$ le terme linéaire $k_2 Z_0 t$ s'annule, l'exponentielle se réduit à son facteur $(k_2/k_1) Z_0$ qui se trouve être égal au terme constant et de signe contraire, de sorte que Y_r devient alors égal à zéro.

Pour t infini, le terme exponentiel tend vers zéro et la courbe se confond avec la droite $k_2 Z_0 t - (k_2/k_1) Z_0$.

La courbe de Y_r part donc de l'origine des coordonnées pour $t = 0$ et augmente indéfiniment en se rapprochant asymptotiquement de la droite $k_2 Z_0 t - (k_2/k_1) Z_0$ (fig. 181).

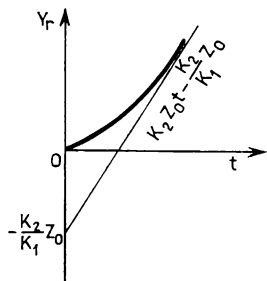


FIG. 181. — Evolution de la « grandeur réglante » Y_r dans un système de régulation par action intégrale. (D'après J. MAZABRAUD, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1961, 6, 997.)

La réponse de la régulation à la perturbation est donc infiniment croissante, ce qui permet d'annuler complètement la variation de la grandeur dite « réglée », propriété qui caractérise justement ce type de régulation.

Somme exponentielle : double fuite exponentielle

Supposons que le réservoir qui nous a servi de modèle analogique pour la décroissance exponentielle soit percé non plus d'un seul, mais de deux orifices O_1 et O_2 (fig. 182).

On peut considérer qu'un tel système est équivalent à celui constitué par un réservoir identique comportant un orifice unique mais dont les dimensions feraient la somme des orifices O_1 et O_2 .

La vidange sera donc ici encore exponentielle à partir du volume initial V_0 , mais suivant un rythme plus rapide, tenant compte de la double fuite exponentielle (fig. 182).

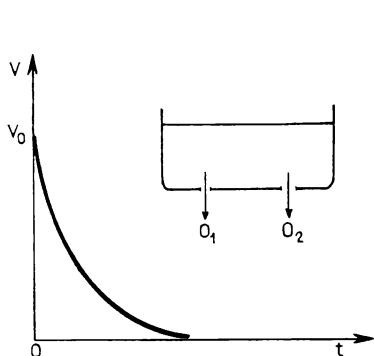


FIG. 182.

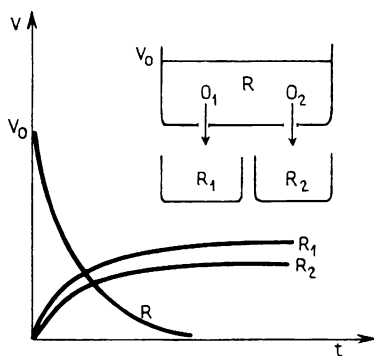


FIG. 183.

Si chacun des orifices se vide dans un réservoir séparé, R_1 et R_2 (fig. 183), le volume liquidien qui pénétrera dans chaque réservoir sera représenté par la fuite correspondante, à savoir

$$V_1 = V_0 (1 - e^{-k_1 t})$$

et

$$V_2 = V_0 (1 - e^{-k_2 t})$$

respectivement.

Alors que la courbe *de vidange* de R est une exponentielle décroissante, les courbes *de remplissage* de R_1 et R_2 seront donc des exponentielles ascendantes (fig. 183), la distribution respective du liquide entre R_1 et R_2 étant déterminée par les dimensions relatives de O_1 et O_2 .

* *Epreuve de fixation thyroïdienne de l'iode radio-actif*

Un tel système se rencontre en médecine isotopique lorsqu'un isotope est enlevé du plasma par deux organes à un taux proportionnel à sa concentration plasmatique. C'est ce qui se passe en particulier au cours de l'épreuve de fixation thyroïdienne de l'iode radio-actif. Il existe en effet alors une compétition entre le corps thyroïde et le rein pour enlever du plasma l'iode radio-

actif. La concentration plasmatique de ce dernier diminue donc exponentiellement tandis que la courbe de fixation thyroïdienne et la courbe d'élimination

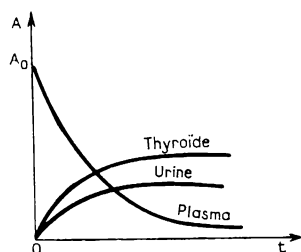


FIG. 184. — Evolution de la radioactivité après administration d'une dose standard d'iode radioactif (schématique).

urinaire sont toutes deux des exponentielles ascendantes mais « compétitives », toute augmentation de la captation thyroïdienne étant reflétée par une réduction de l'élimination urinaire (fig. 184).

Différence exponentielle

Revenons au modèle analogique qui nous a servi à expliciter l'exponentielle de dilution, dite encore « de lavage ». Supposons que le réservoir alimenté sous débit constant F soit constitué, non plus par un seul, mais par deux compartiments A et B communiquant entre eux (fig. 185).

Introduisons un traceur en A . Sa concentration va diminuer exponentiellement comme dans le cas d'un compartiment unique ⁽¹⁾.

A mesure que le traceur s'évacue de A , il arrive en B où sa concentration, initialement nulle, s'élève, d'abord rapidement, puis plus lentement à mesure que le traceur s'évacue de ce compartiment. Du fait de cette fuite, il arrive un moment où

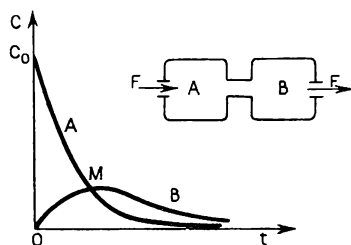


FIG. 185.

⁽¹⁾ Si C_0 est la concentration du traceur à l'instant $t = 0$ et V_A le volume de ce compartiment, la concentration en A , soit C_A , sera donc donnée en fonction du temps par la relation

$$C_A = C_0 \cdot \exp \left[-\frac{F}{V_A} t \right]$$

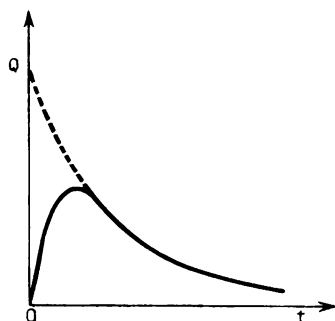
la quantité de traceur qui apparaît en B est exactement équilibrée par celle qui disparaît de ce réservoir. A ce moment la concentration en B , qui est alors égale à la concentration en A , passe par un maximum. Ensuite le taux de disparition du traceur en B excède son taux d'apparition : la concentration en B s'abaisse alors, tout en restant supérieure à celle de A , et toutes deux tendent finalement vers zéro.

La courbe représentant l'évolution en fonction du temps de la concentration en B part donc de zéro, s'élève d'abord rapidement puis plus lentement jusqu'à un maximum M correspondant à son point de rencontre avec la courbe de concentration en A , et décroît ensuite pour devenir asymptote à l'axe des temps : elle revêt, dans son ensemble, l'allure d'une « courbe en dôme étalé » (fig. 185).

* Exemples de différences exponentielles

La concentration en B est le résultat d'une différence à chaque instant entre deux termes exponentiels traduisant, l'un l'apparition, l'autre la disparition du traceur dans ce compartiment ⁽¹⁾.

FIG. 186. — Variation en fonction du temps, du nombre d'atomes du « produit-fille » supposé lui-même radioactif. (D'après BLANC et AMBROSINO, *Eléments de physique nucléaire*, Masson et C^{ie}, 1960.)



⁽¹⁾ Nous verrons au chapitre des équations différentielles que la concentration en B est donnée plus précisément par la relation

$$C_B = C_0 \frac{V_B}{V_A - V_B} \left\{ \exp \left[-\frac{F}{V_A} t \right] - \exp \left[-\frac{F}{V_B} t \right] \right\}$$

où C_0 représente la concentration initiale, V_A et V_B les volumes des compartiments A et B . La forme réelle de la courbe dépend, ce qui se conçoit aisément, des volumes respectifs des compartiments A et B .

On retrouvera donc une courbe de ce type chaque fois que les circonstances conduiront à une différence exponentielle de ce genre.

Il en est ainsi en particulier dans *certaines décompositions radio-actives*, lorsqu'un isotope *A* forme un « produit-fille » *B* qui est à son tour radio-actif. Ces circonstances sont exactement superposables au modèle analogique que nous venons d'examiner ⁽¹⁾ et la courbe obtenue est identique (fig. 186).

Il en est de même dans *l'étude isotopique de certaines réactions métaboliques*, lorsqu'un composé chimique *B* est synthétisé dans l'organisme à partir d'un composé *A*. Dans ce cas, « la concentration » correspond à « l'activité spécifique », c'est-à-dire la radio-activité par unité de poids moléculaire. L'isotope radio-actif est incorporé à *A* et l'on détermine en fonction du temps les activités spécifiques de *A* et de *B*. Si ces activités spécifiques sont égales quand *B* passe par un maximum, on peut en inférer que *A* est bien un précurseur de *B*.

Signalons enfin que *certaines boucles de régulation physiologique* conduisent également à des séquences de ce type. Tel est le cas en particulier, selon MAZABRAUD ⁽²⁾, de la régulation concernant le taux plasmatique des substances étrangères à l'organisme, comme la Phénol-sulfone-phthaléine ⁽³⁾.

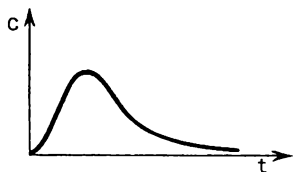


FIG. 187. — Variation de la concentration sanguine de la PSP après injection intramusculaire. (D'après J. MAZABRAUD, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1961, 6, 997.)

⁽¹⁾ Nous verrons d'ailleurs que dans ce cas le nombre d'atomes de *B* en fonction du temps est donné par la relation

$$B = A_0 \frac{\alpha}{\beta - \alpha} [e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}]$$

où α et β sont les constantes de désintégration de *A* et de *B* et qui est, on le voit, tout à fait superposable à la précédente.

⁽²⁾ MAZABRAUD, J., « Analyse d'une boucle de régulation physiologique », *Rev. Fr. Etudes Clin. et Biol.*, 1961, 6, 997.

⁽³⁾ On montre que la valeur de la concentration plasmatique *x* en fonction du temps est alors donnée par la relation

$$x = \frac{k_1}{k_2 - k_1} Z_0 [e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}]$$

où Z_0 représente la quantité de substance administrée.

La courbe en fonction du temps de la concentration plasmatique de ces substances revêt alors l'allure « en dôme étalé » que nous venons de décrire (fig. 187).

Equilibre exponentiel

Nous étudierons sous cette rubrique des cas où des termes exponentiels de sens différent se compensent mutuellement pour aboutir finalement à un équilibre stable.

Pour illustrer cette éventualité, on peut imaginer un réservoir liquidien avec deux compartiments A et B reliés par deux tubulures T_1 et T_2 permettant entre eux un mélange constant (fig. 188).

Déposons le traceur en A . Il va s'évacuer à travers T_1 en B où sa concentration va s'élever. Mais corrélativement une partie du traceur repasse de B en A par la tubulure T_2 . De sorte que la concentration du traceur augmente de moins en moins en B et diminue de moins en moins en A . Finalement, un état d'équilibre s'établit, la concentration se fixant dans les deux compartiments à une valeur commune C_E dont le niveau est fonction des volumes respectifs de A et de B . La courbe en fonction du temps de la concentration en A est une exponentielle décroissante, celle de la concentration en B , une

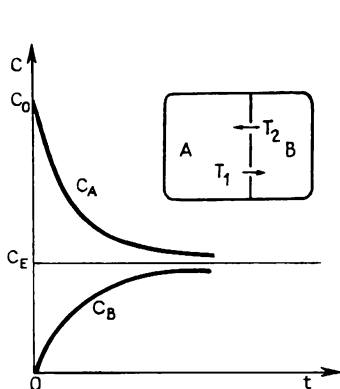


FIG. 188.

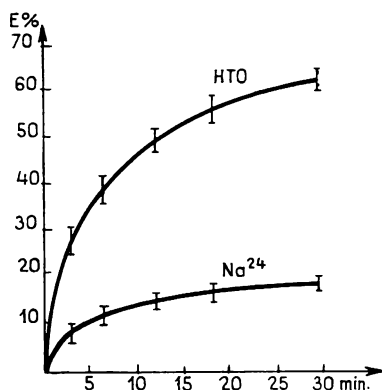


FIG. 189.

FIG. 189. — Espace de distribution E (en % du poids) du radio-sodium (Na^{24}) et de l'eau tritiée (HTO) en fonction du temps dans un groupe d'animaux en expérience. (D'après MOREL et AERBERHARDT, *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1957, 2, 782.)

exponentielle ascendante. Toutes deux tendent asymptotiquement vers l'horizontale correspondant à la concentration à l'équilibre C_E (fig. 188). Un tel système peut servir de modèle analogique pour figurer *les échanges entre les différents compartiments liquidiens*, par exemple pour représenter la distribution d'un isotope diffusible entre le plasma et les liquides extra-cellulaires. C'est ainsi que l'étude des espaces de distribution des isotopes diffusibles, comme le radio-sodium ou l'eau tritiée par exemple, conduit à des exponentielles ascendantes (fig. 189).

* Succession de termes exponentiels

Dans certains cas, des termes exponentiels, au lieu de coexister simultanément, peuvent se succéder dans le temps.

Ainsi, une fonction peut d'abord décroître suivant une exponentielle de pente k_1 puis suivant une exponentielle de pente plus faible k_2 .

En coordonnées semi-logarithmiques, on aura donc successivement deux droites de pente différente k'_1 et k'_2 correspondant, l'une au terme dit « rapide », l'autre au terme dit « lent » de l'exponentielle (fig. 190).

Une telle succession de termes exponentiels n'est pas rare en biologie. C'est ainsi qu'après administration de *fer marqué*, on constate que la radioactivité du plasma décroît d'abord rapidement au cours des premières heures et puis plus lentement par la suite (fig. 191). Le terme lent de l'exponentielle est dû ici à ce qu'une partie du fer marqué n'est pas utilisée par la moelle

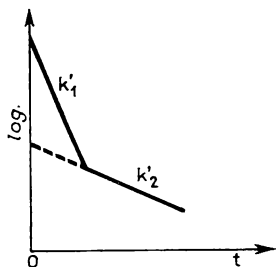


FIG. 190.

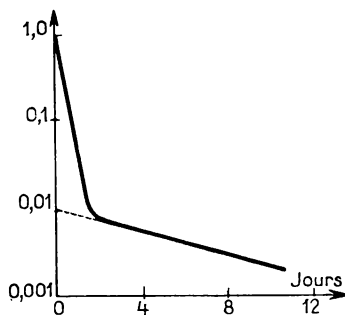


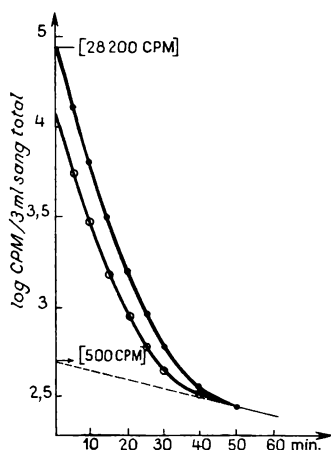
FIG. 191.

FIG. 191. — Evolution en fonction du temps de la radioactivité plasmatique après administration de Fe^{59} . (D'après POLLYCORE et MORTIMER, *J. Clin. Invest.*, 1961, **40**, 753.)

osseuse pour l'élaboration des érythrocytes et retourne inchangée dans le plasma, réalimentant ainsi le stock de fer disponible.

L'étude du *débit hépatique au moyen de l'or colloïdal radio-actif* conduit également à mettre en évidence un composant rapide et un composant lent. Le premier correspondant aux particules captées par le foie, le second au contingent des particules qui échappent à la captation hépatique et sont fixées par d'autres parties du système réticulo-endothélial, la rate en particulier. En effet, la radio-activité du composant rapide est plus faible dans le sang sus-hépatique que dans le sang périphérique, alors qu'il n'y a pas de différence dans les prélèvements correspondants pour le composant lent où les deux courbes sont confondues (fig. 192).

FIG. 192. — Décroissance de la radio-activité dans le sang veineux périphérique (●) et dans le sang veineux sus-hépatique (○) après injection intraveineuse unique d'or colloïdal radioactif. En pointillé, droite du composant lent extrapolée au temps zéro. (D'après J. P. BENHAMOU et coll., *Rev. Fr. Etudes Clin. Biol.*, 1961, 6, 1067.)



Cette succession de termes exponentiels de pente différente se retrouve encore au cours de l'épreuve d'exploration fonctionnelle hépatique à la *Bromo-sulfone-phthaléine* (BSP). Mais ici le terme lent n'apparaît que dans les conditions pathologiques qui permettent un retour du colorant dans le compartiment plasmatique (fig. 193) ⁽¹⁾.

(¹) A noter que dans le cas de l'ictère mécanique, la pente du terme lent tend vers l'horizontale. On retrouve en effet alors les conditions expérimentales de la ligature du cholédoque.

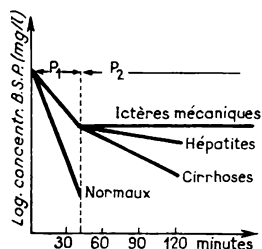


FIG. 193. — *Epuration sanguine de la BSP chez les sujets normaux et dans les affections hépato-biliaires (schématique). (D'après CAROLI et NYS.)*

Ainsi l'existence d'un terme exponentiel de pente différente objectivé par les tracés semi-logarithmiques reçoit-elle dans chaque cas une interprétation physio-pathologique particulière.

CHAPITRE XIII

COURBE EN CLOCHE, COURBE SIGMOÏDE, COURBE LOGISTIQUE

Pour terminer ces études de courbes, nous allons étudier maintenant trois courbes qui présentent un intérêt particulier pour le biologiste : la courbe dite « en cloche », la courbe sigmoïde et la courbe logistique.

Courbe en cloche

Elle répond à l'équation

$$y = e^{-x^2/2}$$

Ce n'est pas une exponentielle ordinaire puisque l'exposant n'est pas en x , mais en x^2 . Toutefois, on y retrouve e avec un exposant négatif dans lequel figure la variable x .

Essayons de préciser son tracé point par point :

- pour $x = 0$, $y = e^0 = 1$: la courbe passe par le point P de Oy d'ordonnée $OP = +1$;
- pour $x = +\infty$, y est de la forme $1/e^\infty$, donc tend vers zéro : la courbe admet donc la branche positive de Ox comme asymptote ;
- pour $x = +1$,

$$y = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,60 :$$

la courbe passe par le point M de coordonnées $x = +1$ et $y \simeq 0,60$.

Par ailleurs, si on remplace x par $-x$, y ne change pas et reste toujours positif : la courbe est donc symétrique par rapport à Oy .

Toutes ces données permettent de dégager l'allure générale de la courbe cherchée : c'est une courbe « en cloche » ayant son sommet sur l'axe Oy en P ,

qui admet l'axe des x comme asymptote et passe par le point M et son symétrique M' (fig. 194). La dérivée, que l'on calcule facilement par la formule des dérivées de fonction de fonction ⁽¹⁾ est

$$y' = -x \cdot e^{-x^2/2}.$$

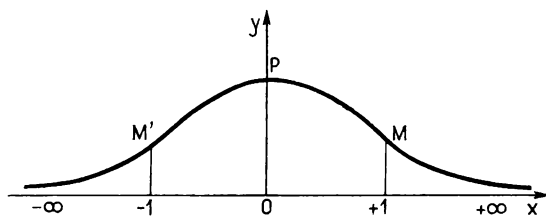


FIG. 194.

Elle est toujours du signe contraire de x , c'est-à-dire positive à gauche et négative à droite de l'axe des y : on peut vérifier que la fonction est bien croissante pour les valeurs négatives de x qui rendent la dérivée positive, et décroissante pour les valeurs positives de x qui rendent celle-ci négative (fig. 194).

Pour $x = 0$, la dérivée s'annule en passant de $+$ à $-$: la courbe présente à ce niveau un maximum d'ordonnée $+1$ (qui correspond au point P).

La dérivée seconde, que l'on peut calculer suivant la formule de dérivation d'un produit ⁽²⁾ est

$$y'' = e^{-x^2/2} \cdot (x^2 - 1).$$

(1) On pose $\frac{x^2}{2} = U.$

La fonction devient $y = e^{-U}$, dont la dérivée par rapport à U est

$$y'_U = -e^{-U}, \text{ c'est-à-dire } -e^{-x^2/2}.$$

Pour avoir la dérivée par rapport à x , soit y'_x , il faut multiplier cette expression par la dérivée de U , c'est-à-dire de $x^2/2$, par rapport à x , soit $2x/2$, c'est-à-dire x , ce qui donne

$$-x \cdot e^{-x^2/2}.$$

(2) On pose $-x = U$, d'où $U' = -1$

et $e^{-x^2/2} = V$, d'où $V' = -x \cdot e^{-x^2/2}.$

La dérivée du produit $U \cdot V$ est :

$$U'V + UV' = -1 \cdot e^{-x^2/2} + (-x)(-x \cdot e^{-x^2/2}) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x^2/2}.$$

Elle s'annule pour $x^2 = 1$, c'est-à-dire $x = \pm 1$. La courbe présente donc un point d'inflexion pour $x = 1$ et $x = -1$ qui sont les abscisses des points M et M' (fig. 194).

Courbe de Gauss

Tout l'intérêt de la courbe en cloche vient de ce qu'elle est à l'origine d'une distribution théorique des probabilités : la distribution dite « gaussienne » ou encore « normale », qui joue un rôle absolument fondamental dans le calcul des probabilités et en statistique.

On montre en effet que la courbe dite « de Gauss », qui définit cette distribution a pour équation

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

C'est donc, à un facteur constant près, l'équation de la courbe en cloche que nous venons d'étudier.

Pour obtenir son graphe, il suffira de multiplier par $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ les ordonnées de la courbe en cloche, ce qui reporte à $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ l'ordonnée du maximum (fig. 195).

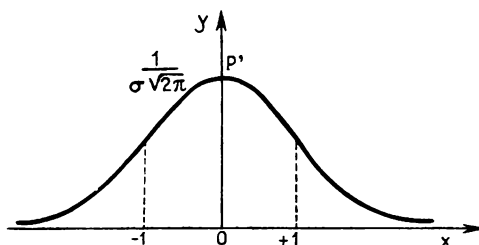


FIG. 195.

Un très grand nombre de phénomènes dont les variations sont influencées par le hasard suivent une loi gaussienne de répartition. Il en est ainsi notamment des variations des caractères biométriques, tels que le poids, la taille, les mensurations diverses, la pression artérielle, les constantes biologiques, etc. tant chez l'homme que chez les diverses espèces animales, ainsi que pour les variations morphologiques observées en botanique. C'est dire tout l'intérêt de sa connaissance pour le biologiste. De plus la courbe de Gauss peut être

exploitée pour résoudre un grand nombre de problèmes d'interprétation statistique. Cette exploitation s'appuie, nous le verrons, sur les particularités morphologiques de cette courbe ⁽¹⁾, c'est-à-dire en pratique celles de la courbe en cloche, c'est dire tout l'intérêt de la connaissance de cette dernière.

Intégrale de la courbe en cloche : courbe sigmoïde

Proposons-nous maintenant de déterminer l'intégrale $Y = F(x)$ de la courbe en cloche.

Elle mesure par définition la surface comprise sous la courbe $y = e^{-x^2/2}$ lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Y part évidemment de zéro pour $x = -\infty$ et vaudra la totalité, soit 100 % de la surface S pour $x = +\infty$. Comme la courbe $y = e^{-x^2/2}$ est symétrique par rapport à Oy , la surface de gauche est égale à la surface de droite et représente exactement 50 % de la surface totale. Donc pour $x = 0$, l'ordonnée de la courbe intégrale Y sera la moitié exactement de celle correspondant à $x = +\infty$.

La fonction $y = e^{-x^2/2}$ est la dérivée de cette fonction intégrale Y . Comme elle est toujours positive, la fonction Y est donc constamment croissante quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour $x = \pm\infty$, la dérivée $y = e^{-x^2/2}$ tend vers zéro : à ce niveau, la courbe intégrale admet donc des tangentes horizontales.

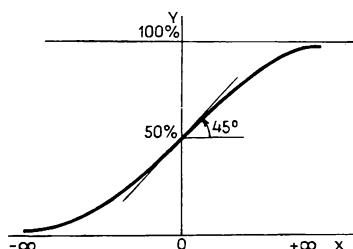


FIG. 196.

Pour $x = 0$, la dérivée $y = e^{-x^2/2}$ vaut $+1$: la courbe intégrale admet donc à ce niveau comme tangente la droite de pente $+1$, c'est-à-dire la bissectrice des axes. Par ailleurs, pour $x = 0$, la fonction

$$y' = -x \cdot e^{-x^2/2}$$

qui est la dérivée de y , donc la dérivée seconde de l'intégrale cherchée s'annule

en passant de $+$ à $-$: à ce niveau, la courbe intégrale présente donc un point d'inflexion et passe d'un côté à l'autre de sa tangente.

(1) Cf. S. GELLER, *ABC de Statistique*, Masson éd. (à paraître).

Les données ci-dessus permettent de dégager l'allure générale de la courbe intégrale : c'est une courbe en *S* allongé, dite « sigmoïde », symétrique par rapport à son point d'inflexion situé sur l'axe des *y* et admettant la bissectrice des axes comme tangente à ce niveau (fig. 196).

* *Sédimentation des particules d'une solution colloïdale*

L'étude de la sédimentation des solutions colloïdales va nous permettre d'illustrer les rapports entre la courbe en cloche et la courbe sigmoïde (fig. 197).

Soumises à une force centrifuge les particules d'une solution colloïdale tendent à s'accumuler à la partie distale du tube qui les contient. La concentration des particules, qui a une valeur C_0 à la partie proximale du tube, augmente à mesure qu'on se dirige vers la partie distale, et cela jusqu'à un certain point, situé à une distance $l_{\max}$ où la concentration, devenue maximale ($C_{\max}$) n'augmente plus jusqu'au fond du tube (fig. 197 haut). La courbe $C = f(l)$ de la concentration C en fonction de la longueur l du tube rend compte de ces phénomènes. C'est une courbe sigmoïde en *S* allongé du type que nous venons de décrire (fig. 197 milieu).

Sa dérivée, c'est-à-dire dC/dl est le *gradient de concentration*. Sa courbe représentative est donc une courbe « en cloche » dont le maximum M correspond au point d'inflexion I de la primitive (fig. 197 bas).

En effet, à l'origine, la concentration étant constante, la croissance de la fonction est nulle, donc aussi la dérivée. Ensuite, la pente, c'est-à-dire la dérivée, augmente jusqu'à un maximum M qui correspond au point d'inflexion I de la courbe $C = f(l)$. Elle décroît ensuite pour s'annuler à nouveau quand la concentration devient constante et maximale.

Cette courbe permet de définir un « pic » caractéristique de la solution étudiée, la position de ce pic étant en effet fonction de la dimension des particules de la solution. Si la solution contient des particules de masses différentes, elles ne sédimentent pas toutes dans les mêmes zones, les particules plus lourdes tendant évidemment à sédimerter plus profondément. Le diagramme de sédimentation offre alors différents pics de concentration correspondant à chaque groupe de particules (fig. 198).

Il est donc possible d'objectiver les divers constituants d'un mélange par les pics de concentration correspondants. Tel est le principe du fraction-

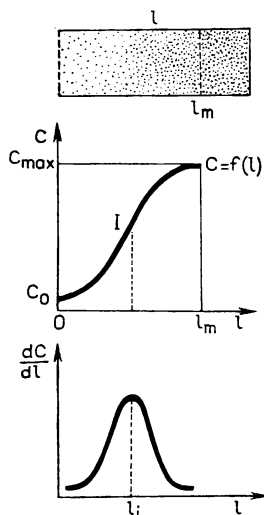


FIG. 197. — *Sédimentation des particules d'une solution colloïdale.* (D'après C. BÉNÉZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et Cie, 1958.)

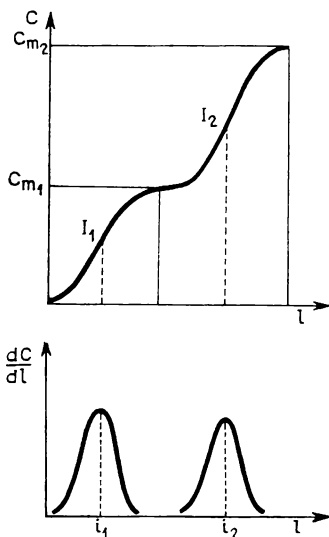


FIG. 198. — *Diagramme de sédimentation.* (D'après C. BÉNÉZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et Cie, 1958.)

nement protéique par l'ultra-centrifugation. La séparation des diverses fractions protéiques du sérum par électrophorèse repose sur des bases analogues, les interactions électriques jouant alors le rôle de la force centrifuge. Le phénomène est susceptible d'enregistrement automatique au moyen d'un appareillage optique approprié permettant d'enregistrer directement la courbe

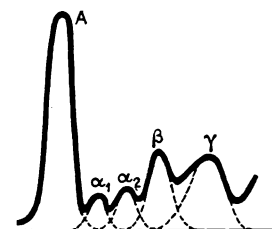


FIG. 199. — *Electrophorèse des protéines sériques.*
A : albumine ; α_1 , α_2 , β , γ : globulines.

du gradient de concentration. D'où la possibilité de l'exploiter directement en pratique clinique (fig. 199).

Courbe logistique

On peut rapprocher de la sigmoïde la courbe logistique qui répond à la relation

$$y = \frac{a}{1 + b e^{-kt}}.$$

Elle est caractérisée, on le voit, par la présence d'un terme exponentiel au dénominateur. Pour t infini, ce terme exponentiel tend vers zéro et y tend vers a . La courbe admet donc l'horizontale d'ordonnée $y = a$ comme asymptote. Pour $t = 0$, le terme exponentiel se réduit à b et y vaut $a/(1+b)$ qui mesure donc l'ordonnée à l'origine. On montre d'autre part que la dérivée a pour expression

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k}{a} \cdot y (a - y) \cdot (1)$$

(1) En effet, posons $1 + b e^{-kt} = U$, d'où $U' = -k b e^{-kt}$. La fonction devient de la forme a/U dont la dérivée est $-a(U'/U^2)$.

Mais U et U' peuvent s'exprimer en fonction de y . En effet la relation

$$y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-kt}}$$

montre que :

$$1 + b e^{-kt} = \frac{a}{y}, \quad \text{d'où} \quad b \cdot e^{-kt} = \frac{a}{y} - 1 = \frac{a-y}{y}.$$

On a donc

$$U' = -k b e^{-kt} = -k \left(\frac{a-y}{y} \right).$$

Par ailleurs puisque

$$U = 1 + b e^{-kt} = \frac{a}{y},$$

on aura

$$U^2 = \frac{a^2}{y^2}, \quad \frac{1}{U^2} = \frac{y^2}{a^2}, \quad -\frac{a}{U^2} = -\frac{y^2}{a}$$

et

$$-\frac{a U'}{U^2} = \left(-\frac{y^2}{a} \right) \left[-\frac{k(a-y)}{y} \right] = \frac{k}{a} y (a-y).$$

C'est une équation du second degré en y . Son graphe est une parabole à concavité tournée vers le bas (coefficient de y^2 négatif), qui coupe l'axe des abscisses aux points $y = 0$ et $y = a$, valeurs pour lesquelles l'équation s'annule, et qui passe par un maximum pour $y = a/2$ (fig. 200 haut).

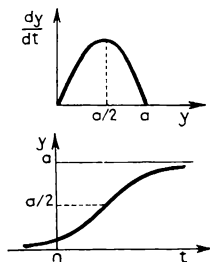


FIG. 200.

On peut en déduire que la primitive passe par un extremum pour $y = a$, ce que nous savions déjà, et également pour $y = 0$, qui sont des asymptotes à la courbe, et qu'elle présente un point d'inflexion pour $y = a/2$. D'où finalement l'allure générale de la logistique qui, comme la sigmoïde, revêt l'aspect d'un S allongé (fig. 200 bas).

On voit que la fonction croît d'abord à un rythme accéléré jusqu'à la valeur $y = a/2$, puis à un rythme ralenti, et de plus en plus ralenti, au-delà de cette valeur.

Ce rythme particulier de croissance qui caractérise la logistique se retrouve souvent dans les phénomènes de croissance physiologique. Nous en avons vu un exemple au chapitre II avec la courbe des tailles d'un garçon qui revêtait une allure en S.

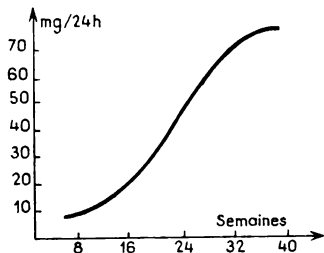


FIG. 201. — *Elimination urinaire du Prégnandioli au cours de la grossesse.* (D'après SOMMERVILLE et MARRIAN.)

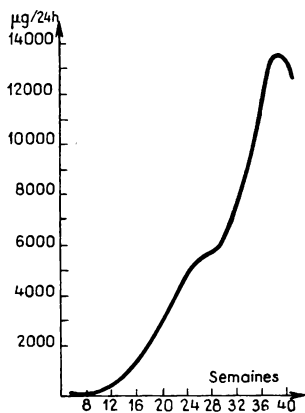


FIG. 202. — *Elimination urinaire des Phénolstéroïdes au cours de la grossesse.* (D'après M. F. JAYLE.)

Il faut en rapprocher les courbes d'éliminations des dérivés hormonaux au cours de la grossesse qui, ont également un aspect en S (fig. 201 et 202) ⁽¹⁾.

Signalons enfin que certains phénomènes économiques, comme le rythme de croissance d'une industrie nouvelle, peuvent revêtir une allure analogue avec une croissance d'abord accélérée, puis ralentie : c'est ce qu'on appelle en statistique « le trend logistique ».



(¹) Selon Jayle et col. ces courbe refléteraient respectivement l'évolution pondérale du fœtus (courbe des Phénolstéroïdes) et celle du placenta (courbe du Prénandioli). La première de ces courbes serait assimilable à une double sigmoïde (JAYLE, M. F., « L'intérêt des œstrogènes dans l'exploration des ovaires et du placenta », *Bull. Féd. Soc. Gynec. Obstet.*, 1961, 13bis, 495).

CHAPITRE XIV

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Définition

Dans les fonctions que nous avons étudiées jusqu'ici, la fonction y était déterminée directement en fonction de la variable x (et éventuellement de divers paramètres $a, b, c, \dots$) dont la connaissance permettait de calculer y :

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad y = f(x, a, b, c, \dots).$$

Mais il peut arriver dans certains cas qu'une fonction ne puisse être définie qu'indirectement, par l'intermédiaire d'une relation l'unissant à ses dérivées ou, de manière plus générale, aux différentielles dx, dy :

$$y = f(y', y'', \dots) \quad \text{ou} \quad y = f(dx, dy, \dots).$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$f(x, y, dx, dy) = 0.$$

Une telle relation entre la fonction et les différentielles est dite « **équation différentielle** ».

Importance des équations différentielles

Une équation différentielle exprime donc une *relation entre les variations d'une fonction et la fonction elle-même*. Elle permet, par conséquent *d'accéder à la connaissance de la fonction par l'intermédiaire de ses variations*.

Or c'est le plus souvent sous cette forme que les fonctions se présentent à l'observateur, tant en biologie que dans les autres sciences expérimentales.

Il arrive souvent en effet que l'observation permette d'enregistrer les variations d'un phénomène, par exemple les variations dans le temps de

la concentration sanguine ou urinaire d'une substance, soit $dC/dt = f(t)$.

A partir de ces données expérimentales l'observateur doit remonter à la loi $C = f(t)$ qui régit le phénomène et qu'il se propose précisément de déterminer.

Ainsi l'étude expérimentale d'un phénomène débouche-t-elle très souvent sur des équations différentielles. C'est dire tout l'intérêt de leur étude.

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle c'est trouver la fonction $y = f(x)$ qui vérifie l'équation, c'est-à-dire la fonction y telle qu'entre y et sa dérivée y' , ou, de manière plus générale, entre y et les différentielles dx , dy , on ait bien la relation en question.

Il s'agit donc, à partir des différentielles dx , dy , de retrouver la fonction y , ce qui implique une opération d'intégration.

Exemple. — Proposons-nous de trouver la fonction $y = f(x)$ telle que sa dérivée y' soit égale à une constante a .

Nous savons que la dérivation de ax donne a . La fonction $y = ax$ est donc telle que sa dérivée y' soit égale à une constante a . La fonction $y = ax$ représente donc une solution du problème. Mais ce n'est pas la seule : en effet toutes les fonctions telles que $y = ax + k$ admettent également pour dérivée $y' = a$. Toutes ces fonctions représentent donc également une solution de l'équation différentielle proposée.

Nous dirons que l'équation $y = ax + k$, où k n'est autre que la constante d'intégration, est la *solution générale* de l'équation différentielle, qui admet ainsi pour solution *toutes* les droites de pente a (fig. 203).

Parmi ces droites nous pouvons cependant en choisir une, par exemple celle qui passe par l'origine des coordonnées. Pour cette droite on aura donc pour $x = 0$, $y = 0$, ce qui implique que k est alors égal à zéro. On obtient ainsi la droite $y = ax$, qui passe par l'origine des coordonnées et qui représente une *solution particulière* de l'équation différentielle, celle qui correspond à la valeur $k = 0$ (fig. 203).

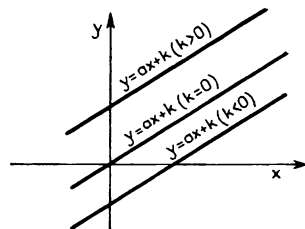


FIG. 203.

Cet exemple élémentaire permet de comprendre qu'une équation différentielle comporte d'abord une *solution générale* qui est constituée par l'ensemble des fonctions $y = f(x)$ qui vérifient l'équation en question.

Cette solution générale est représentée par l'équation $y = f(x) + k$ dans laquelle figure la constante d'intégration k .

Une équation différentielle comporte d'autre part des *solutions particulières* qui correspondent à des valeurs bien déterminées de la constante d'intégration.

Bien entendu, si l'équation différentielle comporte des dérivées ou différentielles successives d'ordre 2, 3, ..., n (on dit alors que l'équation différentielle est d'ordre 2, 3, ..., n) il faudra, pour remonter à la fonction y , intégrer autant de fois, soit 2, 3, ..., n fois, avec chaque fois apparition d'une constante d'intégration différente. Une équation différentielle d'ordre n admettra donc comme solution une fonction dépendant de n constantes. Ces constantes, quoique théoriquement arbitraires, sont déterminées par la situation expérimentale correspondant à chaque problème et qui renseigne sur les conditions initiales.

Des règles précises ont été codifiées pour résoudre les problèmes posés par les différents types d'équations différentielles. Leur étude systématique, même sommaire, déborderait le cadre de cet ouvrage. Nous nous contenterons d'étudier, de façon très élémentaire du reste, quelques cas particuliers susceptibles d'intéresser le biologiste.

Equations différentielles du premier ordre à variables séparables

La résolution des équations différentielles du premier ordre, c'est-à-dire où ne figurent que des dérivées ou différentielles d'ordre 1, est relativement facile lorsque les variables peuvent « se séparer » c'est-à-dire lorsqu'on peut, par les règles du calcul algébrique, faire passer tous les x et les dx dans un membre et tous les y et les dy dans l'autre.

Il en est ainsi en particulier lorsque la dérivée y' peut être exprimée comme le produit d'une fonction $f(x)$ de x par une fonction $g(y)$ de y

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

d'où

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx.$$

Soit, en intégrant

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C^{\text{te}}.$$

Le problème se ramène à calculer les intégrales correspondantes, soit

$$\int \frac{dy}{g(y)} = M(y) \text{ et } \int f(x) \cdot dx = N(x).$$

On peut alors écrire

$$M(y) = N(x) + C^{\text{te}}.$$

Equation différentielle de la loi exponentielle

L'équation $y' = ky$ qui caractérise, nous le savons, l'exponentielle $y = e^{kx}$ représente un cas d'équation différentielle du premier ordre où, précisément, les variables peuvent se séparer.

On a en effet

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

c'est-à-dire, en séparant les variables,

$$\frac{dy}{y} = k \cdot dx.$$

Soit, en intégrant

$$\int \frac{dy}{y} = \int k \cdot dx = k \int dx = kx + C^{\text{te}}$$

Mais l'intégrale

$$\int \frac{dy}{y}$$

n'est autre, par définition, que le logarithme népérien de y , soit $\text{Log } y$.

On a donc

$$\text{Log } y = kx + C^{\text{te}}.$$

Ce qui veut dire que

$$y = e^{kx+c} = e^{kx} \cdot e^c$$

si l'on pose $e^c = k'$, l'équation devient

$$y = k' \cdot e^{kx}.$$

C'est bien l'équation d'une exponentielle. Elle représente la *solution générale* de l'équation différentielle. C'est la constante k' (et non pas k , qui est donné au départ) qui joue le rôle de la constante d'intégration. Sa valeur sera déterminée par des conditions particulières.

* Equation différentielle de la désintégration radio-active

Appliquons ces notions à la désintégration des substances radio-actives.

Le taux de variation dn/dt du nombre d'atomes dn qui se désintègrent dans l'intervalle de temps infiniment petit dt est proportionnel au nombre n d'atomes présents à l'instant t . Soit λ le coefficient de proportionnalité. On peut écrire

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n.$$

Le signe $-$ indiquant qu'il s'agit d'une diminution. C'est-à-dire, en séparant les variables

$$\frac{dn}{n} = -\lambda dt.$$

Soit, en intégrant :

$$\int \frac{dn}{n} = \int -\lambda dt = -\lambda \int dt = -\lambda t + C^{\text{te}}$$

c'est-à-dire

$$\text{Log } n = -\lambda t + C^{\text{te}}.$$

Ce qui veut dire que

$$n = e^{-\lambda t + c} = e^c \cdot e^{-\lambda t}$$

et en posant $e^c = k$

$$n = k \cdot e^{-\lambda t}$$

équation qui représente donc la *solution générale* de l'équation différentielle.

k est la *constante d'intégration*. Sa valeur peut être déterminée par les conditions initiales. Pour $t = 0$, $e^{-\lambda t}$ devient e^0 c'est-à-dire égal à 1 et l'on a alors $n = k$. La constante k représente donc la valeur de n pour $t = 0$, c'est-à-dire le nombre d'atomes initialement présents soit n_0 .

On a donc finalement

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

équation de l'exponentielle de désintégration radio-active que nous connaissons bien.

Un raisonnement exactement calqué sur le précédent nous permettrait bien entendu de retrouver les différentes exponentielles décroissantes dont nous avons vu de multiples exemples : décroissance exponentielle de l'absorption d'un rayon lumineux par la matière : $I = I_0 \cdot e^{-\mu t}$, exponentielle de l'élimination rénale : $C = C_0 \cdot e^{-\alpha t}$, etc.

* Cinétique des réactions monomoléculaires irréversibles

Dans une telle réaction, dite encore « réaction chimique du premier ordre », le nombre de molécules de A qui réagissent, donc *disparaissent* dans l'intervalle dt , soit da/dt , est proportionnel, nous l'avons vu, au nombre de molécules de A présentes.

Soit a la concentration moléculaire initiale de A .

Soit x le nombre de molécules transformées, c'est-à-dire *apparues* à l'instant t .

Si x molécules ont été transformées, il en reste $(a - x)$ et la relation précédente s'écrit

$$\frac{da}{dt} = -k(a - x).$$

Le nombre de molécules transformées *qui apparaissent* pendant l'intervalle dt , soit dx/dt , est évidemment égal à celui des molécules de A qui disparaissent pendant ce même temps.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)$$

avec le signe + cette fois, puisqu'il s'agit d'une augmentation.

Nous sommes donc encore en présence d'une équation différentielle du premier ordre. Pour la résoudre, séparons les variables

$$\frac{dx}{a-x} = k \cdot dt.$$

Intégrons

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int k \cdot dt = kt + C^{\text{te}}.$$

Pour intégrer $dx/a-x$ posons $a-x = U$, d'où $dU = -dx$ et, par suite, $dx = -dU$.

On a donc

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{-dU}{U} = \int -\frac{dU}{U} = -\text{Log } U = -\text{Log } (a-x).$$

L'équation devient

$$-\text{Log } (a-x) = kt + C^{\text{te}}.$$

La valeur de la constante est obtenue par les conditions initiales : pour $t = 0$, $x = 0$, et la constante devient égale à $-\text{Log } a$.

L'équation devient

$$-\text{Log } (a-x) = kt - \text{Log } a$$

c'est-à-dire

$$\text{Log } a - \text{Log } (a-x) = kt$$

soit

$$\text{Log } \frac{a}{a-x} = kt.$$

On en déduit que

$$\frac{a}{a-x} = e^{kt}$$

c'est-à-dire

$$\frac{a-x}{a} = e^{-kt}$$

d'où l'on tire, tous calculs faits,

$$x = a(1 - e^{-kt}).$$

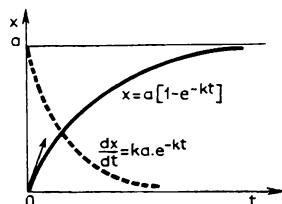
C'est l'équation d'une exponentielle « ascendante » admettant pour asymptote $x = a$ (fig. 204). Elle montre que la concentration en produit de

transformation tend asymptotiquement vers a . La dérivée dx/dt , appelée *vitesse de réaction*, est

$$a[-k(-e^{-kt})] = ka e^{-kt}.$$

C'est l'exponentielle décroissante correspondante ae^{-kt} dont les ordonnées ont été multipliées par k (fig. 204).

FIG. 204. — Cinétique des réactions monomoléculaires. (D'après C. BÉNÉZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^{ie}, 1958.)

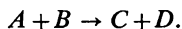


Pour $t = 0$, $e^0 = 1$, $dx/dt = k \cdot a$. C'est la pente de la tangente à la courbe à l'origine (fig. 204).

Au début de la réaction la vitesse est donc proportionnelle à la quantité initiale de substance. Ensuite la vitesse de réaction diminue comme le montre la croissance de plus en plus faible de la courbe, pour s'annuler finalement quand x devient égal à a .

* Cinétique des réactions chimiques du deuxième ordre

Supposons maintenant qu'il y ait deux substances A et B qui entrent en réaction pour donner irréversiblement les produits C et D , toujours molécule pour molécule (réaction dite du deuxième ordre)



L'expérience montre que la vitesse de formation des produits à l'instant t , soit dx/dt , est proportionnelle au produit des concentrations de A et de B présentes à cet instant ⁽¹⁾ et qui sont, respectivement, $(a - x)$ et $(b - x)$:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

⁽¹⁾ En effet, pour que les molécules A et B puissent réagir, il faut qu'elles se rencontrent. Le nombre de collisions sera d'autant plus grand que la concentration $[A]$ est plus grande. De même pour $[B]$. D'où la proportionnalité au produit $[A] \cdot [B]$.

Supposons, pour simplifier, que les concentrations initiales de A et de B soient égales : $a = b$.

La relation précédente devient

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, séparons les variables :

$$\frac{dx}{(a-x)^2} = k \cdot dt.$$

Intégrons

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \int k \cdot dt = kt + C^{\text{te}}.$$

Reste à intégrer

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2}.$$

Pour cela, posons $(a-x) = U$, d'où $dU = -dx$, et par suite, $dx = -dU$.

L'intégrale devient

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \int -\frac{dU}{U^2}.$$

Elle vaut donc $1/U$ ⁽¹⁾, c'est-à-dire $1/(a-x)$.

L'équation devient alors

$$\frac{1}{(a-x)} = kt + C^{\text{te}}.$$

Pour déterminer la valeur de la constante faisons $t = 0$. On a alors $x = 0$, ce qui donne $C^{\text{te}} = 1/a$.

(1) On se souvient en effet que la dérivée de $1/U$ est $-1/U^2$. Donc

$$\frac{d(1/U)}{dU} = -\frac{1}{U^2}$$

et, par suite,

$$d\left(\frac{1}{U}\right) = -\frac{dU}{U^2}.$$

Donc

$$\int -\frac{dU}{U^2} = \int d\left(\frac{1}{U}\right) = \frac{1}{U}.$$

L'équation précédente s'écrit donc

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a}.$$

A partir de cette équation on peut exprimer x en fonction de t . On trouve

$$\frac{x}{a} = \frac{akt}{akt+1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{a} = \frac{t}{t+(1/ak)}.$$

Le second membre de cette équation est de la forme $X/(X+K)$, c'est-à-dire, on s'en souvient, l'équation de l'hyperbole passant par l'origine des coordonnées.

Le graphe de x/a en fonction de t est donc une branche d'hyperbole passant par l'origine des coordonnées et admettant pour asymptote horizontale la droite $x/a = 1$ (fig. 205). Comme précédemment, la vitesse de réaction,

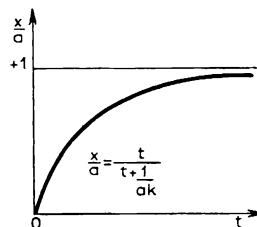


FIG. 205. — Cinétique des réactions chimiques du second ordre. (D'après C. BÉNÉZECH, *Physico-chimie biologique et médicale*, Masson et C^{ie}, 1958.)

représentée par la pente de la courbe, décroît, on le voit à mesure que la réaction se prolonge, pour devenir nulle quand $x/a = 1$, c'est-à-dire quand $x = a$. Mais la décroissance se fait ici le long d'une branche d'hyperbole alors que dans le cas précédent elle se faisait le long d'une exponentielle ascendante.

* Croissance d'une population fermée. Loi de Malthus

Considérons une population « fermée », c'est-à-dire ne comportant pas d'échange, ni immigration, ni émigration, avec l'extérieur.

Dans ces conditions les seules causes de variation de la population sont les naissances et les morts.

Soit N le coefficient de natalité, M celui de mortalité. Soit P la population dont nous cherchons à préciser l'évolution dans le temps.

En faisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (en supposant notamment P assez grand) on peut écrire que dans un intervalle de temps très petit dt la population augmente, du fait des naissances, de la quantité dP telle que

$$dP = N \cdot P \cdot dt.$$

Pendant le même intervalle de temps, elle diminue, du fait des décès, de

$$dP = -M \cdot P \cdot dt.$$

On a donc

$$dP = P \cdot (N - M) \cdot dt.$$

C'est-à-dire

$$\frac{dP}{P} = (N - M) dt.$$

Equation différentielle qui conduit, suivant le raisonnement précédemment exposé, à l'exponentielle

$$P = e^{(N-M)t}.$$

Dans la mesure où $N > M$, on a donc théoriquement une croissance exponentielle de la population.

Cette loi se vérifie en gros dans le développement de certaines cultures microbiennes. Son application, beaucoup plus discutable, à la population du globe considérée comme un tout, est connue sous le nom de « *Loi de Malthus* » sur laquelle on a voulu s'appuyer pour justifier une politique de limitation des naissances.

Equations linéaires du premier ordre

Lorsque les termes ne sont pas directement séparables, l'équation différentielle du premier ordre peut encore être résolue assez facilement si elle est linéaire, c'est-à-dire du premier degré par rapport à y et y' . Cela signifie que y ou y' peuvent être multipliés par des fonctions de x , comme $A(x)$, $B(x)$ par exemple, mais qu'il ne figure pas de produits tels que $y \cdot y'$ ou de puissances de y ou de y' .

La forme générale de ces équations est donc

$$A(x) \cdot y' + B(x) \cdot y = C(x).$$

Supposons que nous connaissions une solution particulière y_1 de cette équation c'est-à-dire que nous connaissions une fonction y_1 telle que

$$A(x) y_1' + B(x) y_1 = C(x).$$

Soustrayons cette équation de l'équation générale, membre à membre. Il vient

$$A(x) [y' - y_1'] + B(x) [y - y_1] = 0$$

c'est-à-dire, en posant $U = y - y_1$

$$A(x) \cdot U' + B(x) \cdot U = 0.$$

On en déduit que la fonction $U = y - y_1$ est une solution de l'équation différentielle correspondante, dite « sans second membre », dans laquelle on a remplacé le second membre par zéro.

Or, il s'agit là d'une équation que nous savons résoudre, car les variables se séparent. Elle peut en effet s'écrire

$$A(x) \frac{dU}{dx} + B(x) U = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{dU}{U} = - \frac{B(x)}{A(x)} dx.$$

Mais si l'on connaît U et y_1 on pourra déterminer facilement y , qui vaut $U + y_1$.

Si donc on peut trouver une solution *particulière* y_1 de l'équation *complète* avec second membre, il suffira de lui ajouter la solution U de l'équation *sans second membre* pour obtenir la solution *générale* $y = U + y_1$ de l'équation *complète* avec second membre.

* *Equation linéaire de la décomposition radio-active*

Nous allons appliquer ces données au cas de la décomposition radio-active où un produit radio-actif A se décompose en un produit B également radio-actif mais donnant naissance à un produit stable C .

}

Supposons qu'au début de l'expérience A soit seul présent. B va apparaître et nous allons essayer de déterminer son évolution en fonction du temps.

Selon la loi de décomposition radio-active, si A est le nombre d'atomes de A à l'instant t et α sa constante de désintégration, le nombre d'atomes de A qui se désintègrent dans l'intervalle dt est

$$dA = -\alpha \cdot A \cdot dt \quad (1)$$

ce qui conduit à l'exponentielle

$$A = A_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

A_0 étant le nombre initial d'atomes de A .

Si B était seul, pendant l'intervalle de temps dt il se désintégrerait un nombre d'atomes dB_1 tel que

$$dB_1 = -\beta \cdot B \cdot dt, \quad (2)$$

β étant la constante de désintégration de B .

Mais pendant ce temps dA atomes de A se sont désintégrés et se sont transformés en autant d'atomes de B , soit $dB_2 = -dA$, qui doivent être ajoutés à dB_1 .

On a donc

$$dB = dB_1 + dB_2 = -\beta \cdot B \cdot dt - dA$$

d'où

$$\frac{dB}{dt} = -\beta B - \frac{dA}{dt} \quad (3)$$

mais la relation (1) indique que

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A = -\alpha A_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

La relation (3) devient donc

$$\frac{dB}{dt} = -\beta B + \alpha A_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

et finalement

$$\frac{dB}{dt} + \beta B = \alpha A_0 \cdot e^{-\alpha t}$$

Ce qui est une équation différentielle du type précédent dont B représente la solution générale y :

$$y' + \beta y = \alpha A_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Pour la résoudre nous devons :

- 1° Déterminer une fonction U solution de l'équation incomplète *sans second membre* $y' + \beta y = 0$, c'est-à-dire telle que $U' + \beta U = 0$;
- 2° Trouver une équation *particulière* y_1 de l'équation *complète* avec second membre ;
- 3° En déduire $y = U + y_1$, solution *générale* de l'équation *complète* avec second membre.

1° En ce qui concerne U , elle est par hypothèse solution de l'équation

$$\frac{dU}{dt} + \beta U = 0$$

d'où

$$\frac{dU}{dt} = -\beta U$$

et

$$\frac{dU}{U} = -\beta dt.$$

C'est une équation différentielle du type exponentiel dont la solution est, nous l'avons vu,

$$U = k \cdot e^{-\beta t},$$

k étant une constante à déterminer.

2° En ce qui concerne la solution particulière y_1 qui doit satisfaire à l'équation

$$y_1' + \beta y_1 = \alpha A_0 e^{-\alpha t}.$$

Il est naturel d'essayer pour cette solution une expression en $e^{-\alpha t}$ qui fait apparaître une exponentielle semblable à celle du second membre.

Essayons donc la solution

$$y_1 = C e^{-\alpha t}$$

où la constante C reste à déterminer.

On en déduit

$$y_1' = -\alpha C e^{-\alpha t}.$$

L'équation différentielle devient

$$-\alpha C e^{-\alpha t} + \beta C e^{-\alpha t} = \alpha A_0 e^{-\alpha t}$$

c'est-à-dire

$$C(\beta - \alpha) \cdot e^{-\alpha t} = \alpha A_0 \cdot e^{-\alpha t};$$

ceci implique que

$$C(\beta - \alpha) = \alpha A_0$$

d'où

$$C = A_0 \cdot \frac{\alpha}{\beta - \alpha}.$$

La solution y_1 est donc

$$y_1 = C \cdot e^{-\alpha t} = A_0 \cdot \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t}.$$

3° On en déduit enfin

$$y = y_1 + U = A_0 \frac{\alpha}{\beta - \alpha} \cdot e^{-\alpha t} + k \cdot e^{-\beta t}.$$

Reste à déterminer la constante k . Nous avons supposé qu'au début nous n'avions que du produit A . Donc pour $t = 0$, B , c'est-à-dire y , doit être égal à zéro. Ce qui, d'après l'équation précédente, implique que

$$k = -A_0 \frac{\alpha}{\beta - \alpha}$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha}{\beta - \alpha} A_0 \cdot e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{\beta - \alpha} A_0 \cdot e^{-\beta t} \\ &= \frac{\alpha A_0}{\beta - \alpha} \left[e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \right] \end{aligned}$$

L'évolution du nombre d'atomes de B en fonction du temps est donc donnée par la relation

$$B = \frac{A_0 \alpha}{\beta - \alpha} \left[e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \right]$$

Son graphe est représenté, au facteur $A_0\alpha/(\beta - \alpha)$ près, par la différence entre les deux exponentielles $e^{-\alpha t}$ et $e^{-\beta t}$.

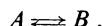
C'est une courbe en « dôme étalé » que nous avons étudiée page 155 ⁽¹⁾. C'est à un résultat exactement superposable qu'aboutit, rappelons-le, l'étude de la régulation du taux plasmatique des substances étrangères introduites dans l'organisme, dont la concentration plasmatique x est donnée en fonction du temps par la formule

$$x = \frac{k_1}{k_2 - k_1} Z_0 \left[e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right]$$

où Z_0 représente la quantité de substance administrée.

* Réaction réversible du premier ordre

Dans ce type de réaction chimique un composé A peut se transformer en un composé B , molécule par molécule, et inversement B est susceptible, cette fois, de redonner A , molécule par molécule également :



Supposons qu'au départ nous n'ayons que du corps A . Nous nous proposons de déterminer l'évolution en fonction du temps du nombre de molécules de B qui vont apparaître.

Soit A et B le nombre de molécules de A et B respectivement à l'instant t .

Si A était seul, le nombre de molécules de A disparaissant dans l'intervalle dt , à l'instant t serait

$$dA = -\alpha A \cdot dt,$$

α étant le coefficient constant caractéristique de la réaction $A \rightarrow B$.

Ces molécules de A se sont transformées, molécule par molécule, en molécules de B . Il est donc apparu pendant cet intervalle dt une quantité $dB_1 = -dA = \alpha A \cdot dt$ de molécules de B .

⁽¹⁾ Dans cet exemple, il s'agissait non pas du nombre d'atomes, mais de la concentration d'un traceur. Dans ce cas, les coefficients α et β peuvent s'écrire (cf. p. 129) :

$$\alpha = F/V_A \quad \text{et} \quad \beta = F/V_B,$$

V_A et V_B étant les volumes respectifs des réservoirs A et B et F le débit constant sous lequel ils sont alimentés. En remplaçant α et β par ces valeurs on aboutit à la formule donnée en note page 155.

Mais au fur et à mesure que les molécules de B apparaissent, il en disparaît une quantité dB_2 proportionnelle au nombre B de molécules présentes :

$$dB_2 = -\beta B \cdot dt,$$

β étant le coefficient constant caractéristique de la réaction $B \rightarrow A$.

Au total le nombre de molécules de B formées dans l'intervalle dt est donc

$$dB = dB_1 + dB_2 = \alpha A \cdot dt - \beta B \cdot dt$$

d'où

$$\frac{dB}{dt} = \alpha A - \beta B.$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\frac{dB}{dt} + \beta B = \alpha A}$$

Nous retrouvons une équation linéaire du premier ordre qu'il faut résoudre pour obtenir B .

1° Pour cela nous recherchons d'abord la solution U de l'équation *sans second membre*.

$$\frac{dU}{dt} + \beta U = 0.$$

Elle est immédiate. On a en effet

$$\frac{dU}{dt} = -\beta U$$

d'où

$$\frac{dU}{U} = -\beta dt$$

équation différentielle qui conduit suivant le schéma habituel à la solution

$$U = k \cdot e^{-\beta t}$$

k étant une constante à déterminer.

2° Cela étant, nous devons rechercher maintenant une *solution particulière* y_1 de l'équation générale complète *avec second membre* :

$$y_1' + \beta y_1 = \alpha A.$$

Il en est une toute trouvée : elle consiste à prendre pour y_1 une valeur constante C , ce qui annule y_1' . On a alors

$$\beta C = \alpha A$$

d'où

$$C = \frac{\alpha}{\beta} \cdot A$$

On a donc

$$y_1 = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

3° Nous pouvons maintenant obtenir la solution *générale* y de l'équation complète avec *second membre* :

$$y = U + y_1 = k \cdot e^{-\beta t} + \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Reste à préciser le coefficient k . Nous avons supposé qu'au départ nous n'avions que du corps A . Donc pour $t = 0$, B , c'est-à-dire y , est égal à zéro et $A = A_0$. On a donc

$$k \cdot e^0 + \frac{\alpha A_0}{\beta} = 0,$$

ce qui implique pour k la valeur $-\alpha A_0/\beta$.

D'où finalement la solution générale

$$\begin{aligned} y &= \frac{\alpha}{\beta} A_0 - \frac{\alpha}{\beta} A_0 \cdot e^{-\beta t} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} A_0 (1 - e^{-\beta t}). \end{aligned}$$

Ainsi l'évolution de B en fonction du temps est donnée par la relation

$$B = \frac{\alpha}{\beta} A_0 (1 - e^{-\beta t})$$

C'est une exponentielle « ascendante » qui admet pour asymptote horizontale la droite d'ordonnée $\alpha A_0/\beta$ (fig. 206).

Le nombre de molécules de A présentes à l'instant t sera de $A_0 - B$, c'est-à-dire

$$A = A_0 - \frac{\alpha A_0}{\beta} + \frac{\alpha A_0}{\beta} \cdot e^{-\beta t}$$

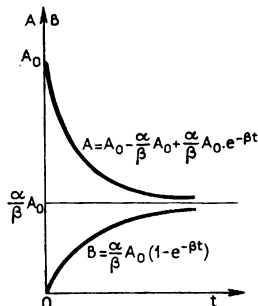


FIG. 206.

$(\alpha A_0/\beta) \cdot e^{-\beta t}$ est une exponentielle décroissante qui admet pour ordonnée à l'origine la valeur $\alpha A_0/\beta$. Le graphe de A s'obtient en ajoutant à cette exponentielle la quantité $A_0 - (\alpha A_0/\beta)$, c'est-à-dire en « remontant » cette exponentielle vers le haut de la quantité $A_0 - (\alpha A_0/\beta)$. C'est donc une exponentielle décroissante partant de A_0 et admettant pour asymptote horizontale la droite $\alpha A_0/\beta$ (fig. 206).

La valeur $\alpha A_0/\beta$ vers laquelle tendent asymptotiquement les valeurs de A et de B représente le niveau d'équilibre auquel finalement s'établit la réaction.

La répartition d'un isotope diffusible entre les différents compartiments liquidiens de l'organisme conduit également, nous l'avons vu page 157, à un « équilibre exponentiel » de ce type. Elle obéit exactement au même modèle mathématique.

Equations différentielles du deuxième ordre

Ce sont celles qui comportent des dérivées ou des différentielles d'ordre 2.

Ces équations posent en règle générale des problèmes très complexes. Nous n'envisagerons leur solution que dans le cas très particulier, relativement fréquent en physique et en biologie, où elles se présentent sous la forme

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dite « équation linéaire du second ordre, à coefficients (a , b , c) constants et sans second membre ».

Remarquons tout d'abord que si y est une solution de cette équation différentielle, Ay (où A est une constante) sera également une solution. En effet, Ay aura pour dérivées Ay' et Ay'' . On aura donc

$$aAy'' + bAy' + cAy = A (ay'' + by' + cy) = 0$$

qui sera bien vérifiée si $ay'' + by' + cy = 0$.

On peut montrer également que s'il y a deux solutions y et z à l'équation différentielle, $y + z$ et, plus généralement, $Ay + Bz$ (où A et B sont des constantes) sont également des solutions.

Cela étant, nous savons que la fonction e^x a pour dérivées successives e^x et que e^{kx} a aussi pour dérivées successives e^{kx} , à un facteur constant près. Il est donc naturel de chercher pour solution une équation de la forme $y = e^{rx}$ où r est une constante à préciser.

Dérivons donc la fonction $y = e^{rx}$. On a successivement

$$y = e^{rx}$$

$$y' = r e^{rx}$$

$$y'' = r^2 \cdot e^{rx}.$$

Portons ces valeurs de y , y' , y'' dans l'équation différentielle. Il vient :

$$ar^2 \cdot e^{rx} + br \cdot e^{rx} + c \cdot e^{rx} = 0$$

c'est-à-dire

$$e^{rx} (ar^2 + br + c) = 0,$$

e^{rx} , nous le savons, ne peut pas être nul.

L'équation sera donc vérifiée lorsque la parenthèse sera nulle, c'est-à-dire quand

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Cette équation dite « *équation caractéristique* » est une équation du second degré en r dont les racines r_1 et r_2 fournissent les valeurs r vérifiant l'équation différentielle.

Compte tenu des considérations développées au début de ce paragraphe, si e^{r_1x} et e^{r_2x} sont des solutions de l'équation différentielle, Ae^{r_1x} et Be^{r_2x} le seront également, ainsi que leur somme $A \cdot e^{r_1x} + B \cdot e^{r_2x}$. La solution générale de l'équation différentielle sera donc

$$y = A \cdot e^{r_1x} + B \cdot e^{r_2x}$$

Un cas particulièrement intéressant en raison de ses applications en physique est celui où l'équation caractéristique n'admet pas de racines réelles mais seulement des racines dites « *imaginaires* ». Nous l'envisagerons au chapitre des imaginaires (cf. Compléments p. 232).

CHAPITRE XV

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Définition

Nous n'avons étudié jusqu'ici que des fonctions dépendant d'une seule variable : la fonction y était connue dès lors qu'on se donnait une valeur de la variable indépendante x .

Il peut arriver cependant, et c'est même le plus souvent le cas, que les variations d'un phénomène soient sous la dépendance de plusieurs grandeurs : le volume d'un gaz comprimé dans un cylindre dépend à la fois de la pression et de la température, le métabolisme basal d'un sujet dépend à la fois de ses caractéristiques physiques (poids, taille, surface corporelle) et de la température, etc.

De telles fonctions, qui dépendent de plusieurs variables susceptibles de varier chacune de façon indépendante, sont dites « fonctions de plusieurs variables ». Nous allons les étudier dans ce chapitre en envisageant essentiellement le cas des fonctions de deux variables.

Modèle géométrique : fonctions de points

Considérons un point P du plan, de coordonnées x et y . Supposons que nous nous intéressions à la surface S du rectangle délimité par les coordonnées du point P (fig. 207). Lorsque le point P se déplace dans le plan xoy , cette surface varie. Ses variations sont conditionnées à la fois par celles de x et de y . La surface S est donc une fonction de deux variables x et y :

$$S = f(x, y).$$

Supposons maintenant que P se déplace non plus dans un plan mais dans l'espace à trois dimensions. Ses coordonnées x, y, z , rapportées à trois demi-

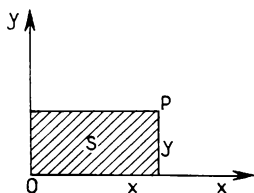


FIG. 207.

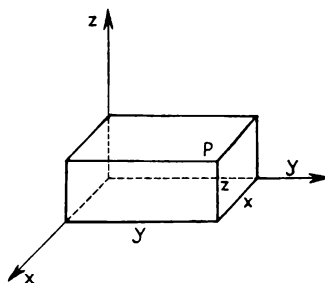


FIG. 208.

axes rectangulaires ox , oy , oz délimitent un parallélépipède rectangle (fig. 208) dont le volume V est une fonction de trois variables x , y , z :

$$V = f(x, y, z).$$

De manière générale, une fonction de plusieurs variables peut comporter un nombre quelconque n de variables qu'on peut considérer comme les coordonnées d'un point P dans un espace à n dimensions. C'est pourquoi les fonctions de plusieurs variables sont aussi appelées des « *fonctions de point* » :

$$f(P) = f(x, y, z, t, \dots).$$

Représentation graphique : lignes de niveau

Proposons-nous de représenter graphiquement les variations de la surface S envisagée au paragraphe précédent.

Considérons pour cela une valeur fixe y_0 de y , ce qui revient à imposer au point P de se déplacer seulement sur l'ordonnée y_0 (fig. 209).

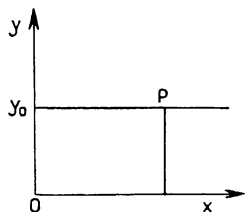


FIG. 209.

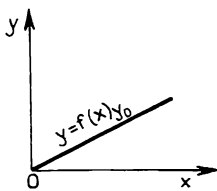


FIG. 210.

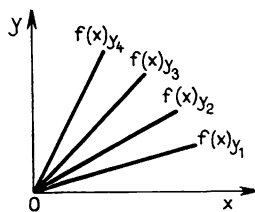


FIG. 211.

Dans ces conditions, la surface S , qui est égale à $y_0 \cdot x$, n'est plus fonction que de la seule variable x . Sa courbe représentative $y = f(x)_{y_0}$ ⁽¹⁾ est une droite du type $y = ax$ passant par l'origine des coordonnées (fig. 210). On l'appelle « courbe d'égal niveau » $y = y_0$, ou encore « ligne de niveau » $y = y_0$.

Si nous considérons maintenant d'autres valeurs $y_1, y_2, \dots$, etc., on obtient ainsi tout un réseau de lignes de niveau dont l'ensemble forme un « *abaque à lignes de niveau* » permettant la détermination pratique de S pour différentes valeurs de y (fig. 211).

* Isothermes des gaz parfaits

Un exemple bien connu de ce type de représentation graphique est constitué par les isothermes des gaz parfaits.

On sait que pour un gaz parfait il existe entre la pression p , la température T et le volume V la relation, dite loi de Boyle-Mariotte :

$$p \cdot V = R \cdot T$$

où R est une constante.

On en tire

$$p = R \cdot T \cdot \frac{1}{V}.$$

La pression p est donc une fonction de deux variables T et V .

Toutefois, si l'on se place à une température donnée T_1 , le produit RT_1 devient constant et p n'est plus alors fonction que d'une seule variable V .

La courbe représentative des variations de p en fonction de V obtenue pour cette valeur fixe T_1 de T , est dite « isotherme » T_1 . C'est une hyperbole équilatère (fig. 212).

On obtiendra bien entendu d'autres isothermes $T_2, T_3, \dots$ etc. pour d'autres valeurs fixes $T_2, T_3, \dots$, etc. de T . L'ensemble de ces courbes forme un *réseau d'isothermes* qui permet une représentation graphique satisfaisante de la loi de variation de p en fonction de V pour différentes valeurs fixes de T (fig. 213).

(1) C'est-à-dire la courbe de $y = f(x)$ pour la valeur y_0 de y .

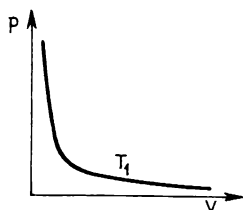


FIG. 212.

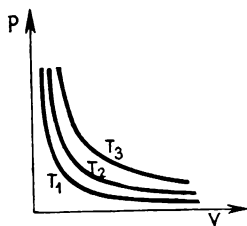


FIG. 213.

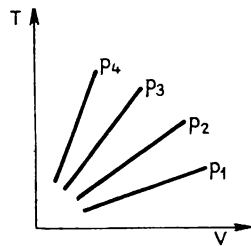


FIG. 214.

On peut inversement exprimer T en fonction de V , ce qui donne

$$T = (p/R) \cdot V,$$

c'est-à-dire l'équation d'une droite passant par l'origine des coordonnées. Pour différentes valeurs fixes $p_1, p_2, \dots$, etc. de p , on obtient ainsi un autre type d'abaque constitué par un réseau de droites passant par l'origine des coordonnées (fig. 214).

Surfaces de niveau

Soit une fonction z , fonction de deux variables x et y

$$z = f(x, y).$$

Considérons dans un plan horizontal xoy un point P de coordonnées x et y (fig. 215). A ces valeurs de x et de y correspond une certaine valeur z de la fonction $z = f(x, y)$. Portons cette valeur sur une verticale élevée à partir du point P . On obtient un point M dont la « cote » ou encore « altitude » z est « l'image » de la fonction $z = f(x, y)$ pour les valeurs de x et de y .

A chaque couple de valeurs (x, y) correspond ainsi une certaine position du point M . Lorsque x et y varient, le point M décrit donc une surface plus ou moins complexe, dite

« surface de niveau » qui peut être également utilisée pour matérialiser les variations d'une fonction de deux variables (fig. 215).

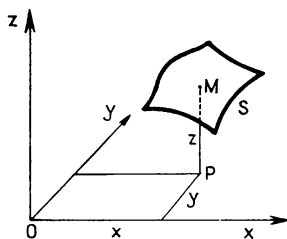


FIG. 215.

Dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

Il est possible de dériver une fonction de plusieurs variables au même titre qu'une fonction ordinaire.

Il suffit pour cela de ne faire varier qu'une variable à la fois. La dérivée ainsi obtenue est dite « *dérivée partielle* » de la fonction, relativement à la variable considérée.

Soit par exemple une fonction de deux variables $z = f(x, y)$. Si, provisoirement, on considère y comme constant, ce qui revient à donner à y une valeur fixe y_0 , z n'est plus fonction que de la seule variable x

$$z = f(x, y_0).$$

On peut alors dériver cette fonction suivant les règles précédemment étudiées. On obtient ainsi la *dérivée partielle de z par rapport à x* , soit z'_x , pour la valeur y_0 de y , ce qui s'écrit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=y_0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \quad (1) \quad \text{ou encore, plus simplement, } \frac{\partial z}{\partial x}$$

tout ceci avec un ∂ « gothique » ou encore appelé ∂ « rond » au lieu du d « droit » romain utilisé pour la dérivation ordinaire.

De la même façon on définit la *dérivée partielle de z par rapport à y* , soit z'_y , pour la valeur x_0 de x :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=x_0} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \quad \text{ou encore } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Exemple. — Soit $z = f(x, y) = 3x^2 \cdot y + y^2 + 4$.

On considère d'abord y comme constant, ce qui donne la dérivée partielle de z par rapport à x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x \cdot y + 0 = 6x \cdot y.$$

En considérant ensuite x comme constant, on obtient la dérivée partielle de z par rapport à y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 2y.$$

(1) Cette notation est souvent utilisée en thermodynamique où l'on se contente de mettre en indice la variable que l'on maintient constante pendant la dérivation partielle, soit ici y .

Signification géométrique des dérivées partielles

Soit une fonction de deux variables $z = f(x, y)$. Nous avons vu qu'on peut la représenter par la surface S décrite par le point M de coordonnées horizontales x et y et de cote z (fig. 215).

Pour former la dérivée partielle $\partial z / \partial x$ nous devons fixer une valeur y_0 de y . Ceci revient à imposer à M de se déplacer seulement dans un plan vertical parallèle à xoz , d'ordonnée y_0 (fig. 216).

Le point M décrit alors la courbe C_1 de la surface S correspondant à ce plan de coupe, d'équation $z = f(x, y_0)$. La dérivée partielle $(\partial z / \partial x)_{y=y_0}$ est la dérivée de cette fonction. Elle exprime donc les variations de la pente de cette courbe lorsqu'on se déplace dans le plan $y = y_0$ (fig. 216).

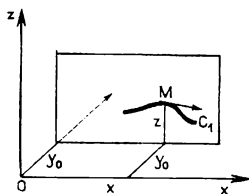


FIG. 216.

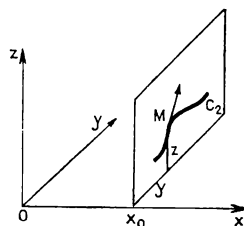


FIG. 217.

De la même façon, bien entendu, la dérivée partielle $(\partial z / \partial y)_{x=x_0}$ exprime les variations de la pente de la courbe C_2 intersection de la surface S avec un plan vertical parallèle au plan $yo z$, d'abscisse fixe $x = x_0$ (fig. 217).

Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables ⁽¹⁾

Considérons un point M' voisin de M et proposons-nous d'évaluer la variation d'altitude, soit dz lorsqu'on passe de M à M' .

Elle est représentée par la cote $P'M' = dz$ du point M' par rapport à un plan horizontal $x'My'$ passant par M (fig. 218).

(1) La lecture de la suite de ce chapitre suppose connues les relations trigonométriques élémentaires dans un triangle rectangle.

Pour nous rendre de M en M' sur la surface S , suivons un chemin détourné en allant d'abord de gauche à droite, dans un plan frontal, suivant $MR = (C_1)$, puis d'avant en arrière, dans un plan longitudinal, suivant $RM' = (C_2)$ (fig. 218).

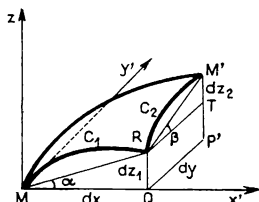


FIG. 218.

Lorsqu'on passe de M à R la variation d'altitude est représentée par $QR = dz_1$. Lorsqu'on passe de R à M' la variation d'altitude est représentée par $TM' = dz_2$. La variation totale d'altitude est donc

$$dz = dz_1 + dz_2 = QR + TM'.$$

Dans le triangle rectangle MRQ , on a

$$QR = MQ \cdot \operatorname{tg} \alpha = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Dans le triangle rectangle RTM' on a

$$TM' = RT \cdot \operatorname{tg} \beta = dy \cdot \operatorname{tg} \beta$$

d'où

$$dz = RQ + TM' = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha + dy \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Lorsque M' se rapproche de M , R se rapproche de M et M' de R , les sécantes MR et RM' tendent vers les tangentes correspondantes. Les angles α et β tendent donc respectivement vers les pentes des tangentes à (C_1) et (C_2) , c'est-à-dire par définition les dérivées partielles $\partial z / \partial x$ et $\partial z / \partial y$ respectivement.

On a donc alors

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

dz est appelée la différentielle *totale* de la fonction $z = f(x, y)$. Elle fait la somme des produits tels que $(\partial z / \partial x) \cdot dx$, où la dérivée partielle $\partial z / \partial x$ se trouve multipliée par la différentielle dx correspondante et qu'on peut considérer, par conséquent, comme une sorte de « différentielle partielle » de la fonction ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ On se souvient en effet que dans le cas d'une seule variable, la différentielle de la fonction dy est égale au produit de la dérivée y' par la différentielle dx de la variable : $dy = y' \cdot dx$.

* Calculs d'erreurs

Un phénomène complexe fait généralement intervenir un nombre plus ou moins important de grandeurs. Son évaluation quantitative est donc le résultat d'un nombre plus ou moins grand de mesures

$$A = f(M_1, M_2, M_3, \text{etc.}, M_n).$$

Chaque mesure comporte une certaine « erreur », dite « incertitude de la mesure », représentée par l'écart entre la valeur mesurée et la valeur réelle.

Le problème se pose, connaissant les erreurs commises sur chaque mesure, de déterminer l'erreur globale qui en résulte dans l'évaluation de A .

On montre qu'on peut considérer l'erreur globale sur A comme une différentielle totale égale à la somme des erreurs commises sur chaque mesure (prises en valeur absolue de manière à se placer dans les conditions les plus défavorables), elles-mêmes considérées comme des différentielles partielles

$$dA = \left| \frac{\partial A}{\partial M_1} \cdot dM_1 \right| + \left| \frac{\partial A}{\partial M_2} \cdot dM_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial A}{\partial M_n} \cdot dM_n \right|.$$

Exemple. — On montre que le débit cardiaque peut être calculé approximativement par la formule de Fick

$$D = \frac{Q}{A - V}$$

où Q est la quantité d'oxygène absorbée par le poumon en une minute et $A - V$ la différence de teneur en oxygène dans le sang artériel A et veineux V de part et d'autre du poumon.

Connaissant l'erreur commise sur Q et sur $A - V$, quelle sera l'erreur commise sur D si l'on utilise cette formule ?

Appliquons la formule différentielle : Pour cela différencions successivement par rapport à Q , puis A , puis V , les autres éléments étant considérés chaque fois comme constants. Il vient

$$dD = \left| \frac{1}{A - V} \cdot dQ \right| + \left| Q \frac{1}{(A - V)^2} \cdot dA \right| + \left| Q \frac{1}{(A - V)^2} \cdot dV \right|.$$

L'incertitude *relative* commise sur D est donc

$$\frac{dD}{D} = dD \cdot \frac{A - V}{Q} = \left| \frac{dQ}{Q} \right| + \left| \frac{dA}{(A - V)} \right| + \left| \frac{dV}{(A - V)} \right|$$

d'où

$$\frac{dD}{D} = \left| \frac{dQ}{Q} \right| + \left| \frac{dA + dV}{(A - V)} \right|.$$

On voit que plus la différence artérioveineuse $(A - V)$ est petite, plus l'incertitude sur le débit devient grande.

Pente le long d'un chemin donné

Reprenons la figure qui nous a servi à définir la différentielle totale et proposons-nous maintenant de calculer la pente de la route *directe* MM' (fig. 219).

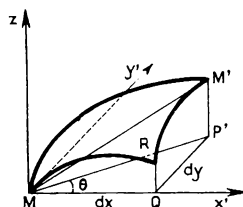


FIG. 219.

Soit θ l'angle que fait le plan de la direction de MM' , c'est-à-dire le plan vertical $MP'M'$, avec le plan frontal passant par M , c'est-à-dire l'angle $P'Mx'$ (fig. 219).

Dans le triangle MQP' on a

$$MQ = dx = MP' \cos \theta$$

$$QP' = dy = MP' \sin \theta.$$

Mais nous avons vu précédemment que

$$M'P' = dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

C'est-à-dire, en remplaçant dx et dy par leurs valeurs,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot MP' \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot MP' \sin \theta.$$

La pente de la droite MM' est

$$p = \frac{M'P'}{MP'} = \frac{dz}{MP'} = \frac{1}{MP'} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot MP' \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot MP' \cdot \sin \theta \right]$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta.$$

C'est ce qui définit la pente de la surface S le long d'un chemin MM' faisant un angle θ donné avec l'axe Mx' :

$$p_{MM'} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \theta$$

On voit que si ce chemin est parallèle à Mx' , $\theta = 0$, $\sin \theta = 0$, $\cos \theta = 1$, la pente se réduit à $\partial z / \partial x$, c'est-à-dire à la dérivée partielle par rapport à x . Si au contraire MM' est dirigé suivant My' , $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$, la pente se réduit à la dérivée partielle par rapport à y : $\partial z / \partial y$.

Dérivée prise à θ constant

Soit (fig. 220) MN un segment égal à l'unité de longueur prise sur Mx' . A partir de N menons dans le plan horizontal $x'My'$ une perpendiculaire à MN . Elle coupe MP' en N' . Proposons-nous de mesurer MP' avec MN' comme nouvelle unité de longueur. On a $MN = MN' \cos \theta$, c'est-à-dire

$$MN' = \frac{MN}{\cos \theta}.$$

Si l était la longueur de MP' mesurée avec MN comme unité

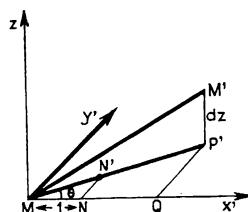


FIG. 220.

$$\left(l = \frac{MP'}{MN} \right)$$

la longueur l' de MP' mesurée dans la nouvelle unité sera

$$l' = \frac{MP'}{MN'} = \frac{MP'}{\frac{MN}{\cos \theta}} = \frac{MP'}{MN} \cdot \cos \theta = l \cdot \cos \theta.$$

La valeur de la pente suivant le chemin MM' qui était

$$p = \frac{P'M'}{MP'} = \frac{dz}{l}$$

sera donc alors

$$p' = \frac{dz}{l'} = \frac{dz}{l \cos \theta} = \frac{p}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \theta \right]$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \operatorname{tg} \theta.$$

$$p' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{tg} \theta$$

C'est ce qu'on appelle la dérivée $\partial z / \partial y$ « prise à θ constant ».

Cette variété de dérivée s'obtient donc en ajoutant au terme $\partial z / \partial x$, le terme $\partial z / \partial y$ multiplié par $\operatorname{tg} \theta$.

Mais $\operatorname{tg} \theta$ est encore égal au rapport

$$\frac{QP'}{MQ} = \frac{dy}{dx}$$

donné par le chemin $\theta = C^{\text{te}}$, ce qu'on note $(dy/dx)_{\theta}$. D'où la formulation généralement adoptée pour la dérivée à θ constant :

$$p' = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\theta}$$

Lorsque $\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque le chemin suivi est parallèle à Ox , $\operatorname{tg} \theta = 0$, la dérivée à θ constant p' se réduit à la dérivée partielle $\partial z / \partial x$, ce qui correspond bien à la définition de la dérivée partielle par rapport à x .

* Transformation adiabatique d'un gaz parfait

La notion de dérivée à θ constant est utilisée dans de nombreux problèmes, notamment en thermodynamique où l'on est amené à introduire une unité particulière pour exprimer les variations le long d'un chemin oblique. En effet, lorsque la grandeur portée en abscisse n'a pas de commune mesure avec la grandeur portée en ordonnée, comme c'est le cas par exemple pour un volume et une température, on est amené à prendre comme critère de variation le long d'un chemin oblique donné la variation d'une des grandeurs que nous savons mesurer, par exemple celle qui est portée en abscisse.

C'est ce qui se passe notamment pour la transformation dite « adiabatique » des gaz parfaits. On appelle ainsi une transformation qui se fait sans échange de chaleur avec l'extérieur (en pratique on calorifuge soigneusement le cylindre où est enfermé le gaz).

Dans ce cas, comme dans le cas général, la température du gaz varie quand le volume se modifie, mais une certaine grandeur, dite « Entropie », reste constante ($S = C^{\text{te}}$). Par suite, la dérivée de la pression par rapport au volume sera, non pas la dérivée partielle $\partial p / \partial V$, mais une dérivée prise à S constant :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S = \frac{\partial p}{\partial V} + \frac{\partial p}{\partial T} \left(\frac{dT}{dV} \right)_S.$$

Graphiquement sur l'abaque de T en fonction de V obtenu pour une certaine valeur p_1 de p , c'est-à-dire l'abaque $T = f(V)_{p_1}$, au lieu de se déplacer parallèlement à l'axe des volumes, on se déplace suivant un certain chemin oblique MM' le long duquel l'entropie S reste constante (fig. 221).

Il apparaît ainsi qu'au cours de cette transformation, la température diminue, alors que dans le cas général elle augmente avec le volume (fig. 221).

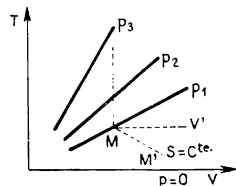


FIG. 221.

Dérivées partielles secondes

Soit une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ et sa dérivée partielle par rapport à x , $\partial z / \partial x$.

Dérivons la une deuxième fois *toujours par rapport à x* . On obtient une dérivée partielle « seconde » :

$$z''_{x,x} = \frac{\partial [\partial z / \partial x]}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Au lieu de faire cette deuxième dérivation par rapport à x , faisons-la *par rapport à y* . On obtient une deuxième variété de dérivée partielle seconde :

$$z''_{x,y} = \frac{\partial [\partial z / \partial x]}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x}.$$

Cette dérivée partielle seconde qui comporte à la fois ∂y et ∂x est dite « mixte ».

Théorème de Schwartz

Pour obtenir la dérivée partielle seconde *mixte*, nous sommes partis de la dérivée partielle *par rapport* à x , soit $\partial z / \partial x$, que nous avons dérivée *par rapport* à y .

Mais nous aurions pu également partir de la dérivée partielle *par rapport* à y , soit $\partial z / \partial y$ en dérivant cette dernière *par rapport* à x :

$$\frac{\partial [\partial z / \partial y]}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}.$$

On montre que ces deux types de dérivées mixtes sont égales

$$\frac{\partial [\partial z / \partial x]}{\partial y} = \frac{\partial [\partial z / \partial y]}{\partial x}$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}.$$

C'est ce qui constitue le *théorème de Schwartz*.

Vérifions-le sur l'exemple précédemment étudié où nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial [\partial z / \partial x]}{\partial y} = 6x$$

et d'autre part

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 2y, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial [\partial z / \partial y]}{\partial x} = 6x \text{ également.}$$

Différentielle totale exacte

Considérons une expression comme

$$d\mathcal{G} = P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions de x et de y .

Cette expression rappelle celle d'une différentielle totale où les différentielles dx et dy sont multipliées par les dérivées partielles correspondantes :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Si P et Q sont effectivement des dérivées partielles, l'une par rapport à x , l'autre par rapport à y , d'une même fonction $\varphi(x, y)$ on dit que la forme différentielle envisagée est une différentielle totale *exacte*.

On a alors

$$d\mathcal{C} = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

avec

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y).$$

Dans ce cas, les dérivées partielles secondes mixtes sont

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

D'après le théorème de Schwartz, ces deux dérivées mixtes sont égales

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On dispose ainsi d'un moyen simple pour vérifier si une forme différentielle est, ou non, une différentielle exacte.

Exemple. — Soit la forme différentielle

$$d\mathcal{C} = -y \cdot dx + x \cdot dy.$$

Est-ce une différentielle totale exacte ?

On a

$$P(x, y) = -y, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

et

$$Q(x, y) = x, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = +1.$$

Ainsi

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Il ne s'agit donc pas d'une différentielle totale exacte.

Facteur intégrant

Si une forme différentielle telle que

$$d\mathcal{C} = P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$$

n'est pas une différentielle totale exacte, on montre qu'on peut toujours trouver une fonction $I(x, y)$ telle que le produit $I \cdot d\mathcal{C}$ soit une différentielle totale exacte.

Cette fonction I est appelée « *facteur intégrant* ».

La nouvelle différentielle $I \cdot d\mathcal{C}$, c'est-à-dire

$$I \cdot P(x, y) dx + I \cdot Q(x, y) dy,$$

étant par hypothèse une différentielle totale exacte, on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{\partial [I \cdot P]}{\partial y} = \frac{\partial [I \cdot Q]}{\partial x}$$

ce qui peut fournir un moyen de trouver le facteur intégrant dans les cas simples.

Exemple. — Reprenons la forme différentielle précédemment envisagée :

$$d\mathcal{C} = -y \cdot dx + x \cdot dy$$

que nous savons ne pas être une différentielle totale exacte.

Vérifions que le facteur intégrant est

$$I = \frac{1}{x^2}.$$

En effet, on a

$$I \cdot P = \frac{1}{x^2} \cdot (-y) = -\frac{y}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial [I \cdot P]}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}$$

$$I \cdot Q = \frac{1}{x^2} \cdot (x) = \frac{1}{x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial [I \cdot Q]}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial [I \cdot P]}{\partial y}.$$

L'expression $I \cdot d\mathcal{C}$, c'est-à-dire $1/x^2 [-y \cdot dx + x \cdot dy]$ est donc bien une différentielle totale exacte.

Intégrale curviligne

Soit une forme différentielle telle que

$$d\mathcal{C} = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions de deux variables x et y .

C'est une forme différentielle de deux variables. Nous ne savons pas l'intégrer.

Mais supposons que nous connaissions une relation quelconque $y = f(x)$ entre x et y . On pourra alors exprimer y et dy en fonction de x et dx respectivement. Dans ces conditions, la différentielle $d\mathcal{C}$ ne comporte plus que la seule variable x et la différentielle correspondante dx . Dès lors, il devient possible de l'intégrer comme une différentielle ordinaire.

Soit maintenant C_1 la courbe représentative de $y = f(x)$ et deux points A et B de cette courbe de coordonnées x_1y_1 et x_2y_2 (fig. 222). Lorsqu'on va de A en B en suivant la courbe C_1 , on a tout au long de ce parcours la relation $y = f(x)$, c'est-à-dire la condition nécessaire pour que l'intégration de $d\mathcal{C}$ soit réalisable.

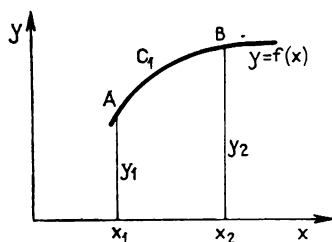


FIG. 222.

Il est donc possible d'intégrer la forme différentielle $d\mathcal{C}$ d'une fonction de deux variables à condition de suivre le parcours de la courbe $y = f(x)$. Une telle intégrale, pratiquée « suivant le chemin C_1 » est dite « *intégrale curviligne* ». On la note

$$\int_{x_1 C_1}^{x_2} d\mathcal{C}$$

ce qui se lit « somme sur C_1 de x_1 à $x_2 d\mathcal{C}$ ».

Exemple 1. — Reprenons la forme différentielle précédemment envisagée :

$$d\mathcal{C} = -y \cdot dx + x \cdot dy.$$

Intégrons-la le long de la droite $y = 1$ entre les points $A(x = -1, y = +1)$

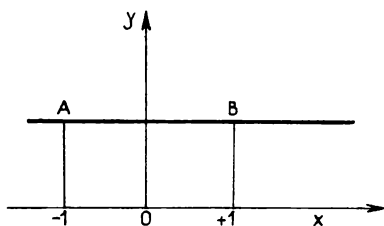


FIG. 223.

et $B(x = +1, y = +1)$ (fig. 223).

Si $y = 1$, $dy = 0$.

Remplaçons y et dy par leurs valeurs dans $d\mathcal{C}$, on a

$$d\mathcal{C} = -1 \cdot dx + x \cdot 0 = -dx$$

d'où

$$\mathcal{C} = \int -dx = -x.$$

Cette intégrale doit être prise entre les abscisses $x = -1$ et $x = +1$, ce qui donne

$$[-x]_{-1}^{+1} = (-1) - (+1) = -2.$$

Exemple 2. — Calculons maintenant $d\mathcal{C}$ toujours entre les points A et B , mais *en suivant la parabole* $y = x^2$ qui passe également par ces deux points (fig. 224).

On a

$$y = x^2, \quad \text{d'où} \quad dy = 2x \cdot dx.$$

Portons ces valeurs dans $d\mathcal{C}$.

On a

$$d\mathcal{C} = -x^2 \cdot dx + x \cdot 2x \cdot dx = x^2 dx$$

d'où

$$\mathcal{C} = \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3} \right) = \frac{2}{3}.$$

Nous trouvons donc pour $d\mathcal{C}$ une valeur différente. La valeur de l'intégrale curviligne dépend en effet, on le conçoit, du chemin qui a été suivi.

Exemple 3. — Faisons les mêmes calculs mais en partant cette fois de la différentielle $1/x^2 [-y \cdot dx + x \cdot dy]$ que nous savons être une différentielle totale exacte.

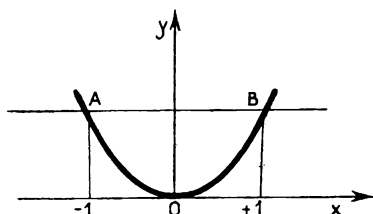


FIG. 224.

Il suffira de multiplier par $1/x^2$ les valeurs trouvées pour $d\mathcal{C}$. Donc :

— Pour la droite $y = 1$, où l'on avait trouvé $d\mathcal{C} = -dx$, on aura

$$d\mathcal{C} = -dx \times \frac{1}{x^2} = -\frac{dx}{x^2}$$

d'où

$$\mathcal{C} = \int_{-1}^{+1} -\frac{dx}{x^2} = \left[\frac{1}{x} \right]_{-1}^{+1} = 1 - (-1) = 2.$$

— Pour la parabole $y = x^2$, où l'on avait trouvé $d\mathcal{C} = x^2 \cdot dx$, on aura

$$d\mathcal{C} = \frac{x^2 \cdot dx}{x^2} = dx$$

d'où

$$\mathcal{C} = \int_{-1}^{+1} dx = [x]_{-1}^{+1} = 1 - (-1) = 2.$$

Nous trouvons donc cette fois la même valeur le long de la droite et le long de la parabole. C'est qu'en effet lorsqu'il s'agit d'une différentielle totale exacte, *l'intégrale curviligne ne dépend plus du chemin suivi* mais seulement des bornes de l'intégration.

* Application. Notion d'entropie

Nous avons vu qu'on peut représenter l'état d'un gaz parfait par l'isotherme $p = f(V)$. Soit (fig. 225) un point A correspondant à un état donné du gaz caractérisé par une pression p et un volume V . On montre que pour l'amener à un état infiniment voisin correspondant à $V + dV$ et $p + dp$ il faut lui fournir une quantité de chaleur

$$dQ = a \cdot dV + b \cdot dp$$

où a et b sont des coefficients qui sont eux-mêmes fonction de V et de p . Nous sommes donc en présence d'une forme différentielle analogue à celles que nous avons précédemment étudiées.

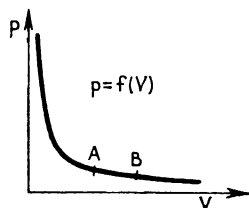


FIG. 225.

Pour passer d'un état à un autre, de A en B par exemple, il faudra fournir une quantité de chaleur totale Q qui correspondra à l'intégrale curviligne effectuée le long de la courbe C de $p = f(V)$:

$$Q = \int_C dQ = \int_C a \cdot dV + b \cdot dp$$

dQ n'est pas une différentielle totale exacte. Mais on montre que si l'on pose $T = t + 273$, qu'on appelle température absolue, la différentielle dQ/T , c'est-à-dire

$$\frac{dQ}{T} = \frac{a \cdot dV}{T} + \frac{b \cdot dp}{T}$$

est alors une différentielle totale exacte.

dQ/T est donc la différentielle d'une certaine fonction S de V et de p :

$$\frac{dQ}{T} = dS = a \frac{dV}{T} + b \frac{dp}{T}$$

S est appelée *entropie* et l'on a par conséquent

$$S = \int_C \frac{dQ}{T} = \int_C a \frac{dV}{T} + b \frac{dp}{T}.$$

D'après ce que nous venons de voir des propriétés des différentielles totales exactes, l'entropie est indépendante des états intermédiaires, elle ne dépend que de l'état final et de l'état initial.

Intégrales multiples

Puisqu'il est possible de dériver des expressions qui renferment plusieurs variables indépendantes, rien ne s'oppose à ce qu'on puisse inversement les intégrer. Bien entendu il y aura lieu d'intégrer autant de fois qu'il y aura de variables indépendantes. On aboutit ainsi à la notion d'intégrale double : symbolisée $\iint$ qui s'énonce « double somme de », triple : $\iiint$ (« triple somme de »), etc. : On les appelle des intégrales multiples.

Pour différentier une fonction de plusieurs variables il fallait, nous l'avons vu, différentier successivement par rapport à chacune d'elles. De façon analogue, pour calculer une intégrale multiple, on intègre successivement par rapport à chacune des variables, les autres étant supposées constantes. L'intégrale multiple est ainsi ramenée à 2, 3, ..., n intégrales simples.

Exemple : Moment d'inertie d'un cylindre. — Pour montrer le mécanisme d'une intégration multiple, nous allons calculer le moment d'inertie d'un cylindre.

Soit un cylindre de rayon R et de hauteur h (fig. 226). Pour former le moment d'inertie autour de l'axe oz du cylindre il faut multiplier chaque élément du volume par le carré de sa distance à oz .

Soit un élément de dV de volume. Il a pour base un élément de surface délimité latéralement par deux rayons d'angle θ et, d'autre part deux arcs de cercle de rayon ρ et $\rho + d\rho$. La hauteur est dz .

$d\theta$ étant petit, la longueur du petit arc limitant intérieurement l'élément de volume est égale à $\rho \cdot d\theta$. La base de l'élément de volume a donc pour mesure $\rho \cdot d\theta \cdot d\rho$ et son volume vaut $\rho \cdot d\theta \cdot d\rho \cdot dz$.

Le moment d'inertie de l'élément de volume sera donc

$$dM = \rho^2 \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho \cdot dz = \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot dz.$$

Le moment d'inertie du cylindre fera la somme intégrale de tous les produits tels que dM et comme il y a trois variables ρ , θ , z , ce sera une triple somme :

$$M = \iiint \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot dz.$$

ρ varie de 0 à R ,

θ varie de 0 à 2π

et z varie de 0 à h .

L'intégrale triple s'écrit donc

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot dz.$$

Intégrons d'abord par rapport à ρ en supposant θ et z constants. On a

$$\int_0^R \rho^3 \cdot d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = \frac{R^4}{4}.$$

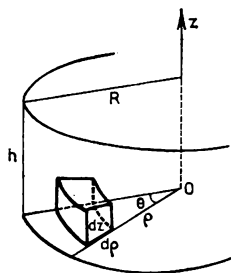


FIG. 226.

Intégrons maintenant le résultat obtenu par rapport à θ

$$\int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \cdot d\theta = \left[\frac{R^4}{4} \cdot \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Reste à intégrer ce résultat par rapport à z

$$\int_0^h \frac{\pi R^4}{2} \cdot dz = \left[\frac{\pi R^4}{2} \cdot z \right]_0^h = \frac{\pi R^4}{2} \cdot h$$

d'où finalement

$$M = \frac{\pi R^4}{2} \cdot h.$$

=====

RAPPELS

ET

COMPLÉMENTS

I. — PUISSANCES

Puissance d'un nombre. — Soit un nombre algébrique a . Nous savons former les produits $a \cdot a$, $a \cdot a \cdot a$, et de manière générale $a \cdot a \cdot a \dots$ etc. ... n fois.

Ce produit de n facteurs égaux à a est appelé « *puissance n^{e} de a* » (on dit encore qu'on a élevé a à la puissance n). On le symbolise de manière « condensée » a^n

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots n \text{ fois} \quad (1)$$

Le nombre entier positif n est l'*exposant* de la puissance considérée. Il indique combien de fois le facteur a figure dans l'expression.

Ainsi $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^2 = a \cdot a$ et, par suite, $a^1 = a$; a peut donc être considéré comme la puissance d'exposant 1 de a :

$$a^1 = a$$

Puissances de 10. — Un cas particulier important, en raison du caractère décimal de notre système de numération, est représenté par les puissances de 10 :

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1\,000, \dots \text{ etc.}$$

(1) On symbolise également l'opération « puissance » par la lettre Π majuscule et, par analogie avec l'opération Σ , on écrit

$$\prod_{i=1}^{i=n} a_i$$

signifiant que l'on a effectué le produit de i facteurs égaux à a , pour toutes les valeurs de i , depuis $i = 1$, jusqu'à $i = n$.

On voit que l'exposant de la puissance de 10 est égal au nombre de zéros qui suivent le chiffre 1.

Ceci permet de simplifier l'écriture lorsqu'on doit manipuler des nombres très importants. Ainsi dira-t-on que dans les conditions ordinaires de température et de pression un litre de gaz contient environ $3 \cdot 10^{22}$ molécules, ce qui est évidemment beaucoup plus simple que d'écrire 3 suivi de 22 zéros.

Produit de deux puissances. — Considérons deux puissances d'un même nombre, par exemple a^2 et a^3 . Le symbole a^2 signifie que le facteur a est contenu 2 fois dans cette expression, a^3 que le facteur a est contenu 3 fois dans cette expression.

Si donc nous formons le produit $a^2 \times a^3$, le facteur a figure 2 fois + 3 fois, soit 5 fois dans cette expression. On doit donc l'écrire a^5 .

De manière générale, par conséquent, si l'on a les puissances a^m et a^n de a , où m et n sont des entiers positifs, leur produit $a^m \times a^n$ sera égal à a^{m+n}

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

D'où la règle : *pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'additionner les exposants.*

Bien entendu, cette règle est très générale et elle s'étend au produit de plusieurs puissances d'un même nombre

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}.$$

Puissance d'une puissance. — Proposons-nous de rechercher par exemple la troisième puissance de a^2 , c'est-à-dire $(a^2)^3$.

D'après la définition des puissances, on aura

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^6 = a^{2 \times 3}.$$

De manière générale, on aura donc

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

D'où la règle : *pour former la puissance d'une puissance, il faut multiplier les exposants.*

Division de deux puissances. — Soit à diviser a^5 par a^3 .

D'après la définition, on a

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a = a^2 = a^{5-3}.$$

De manière générale, si l'on considère deux puissances a^m et a^n de a (avec $m > n$), on aura donc

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

D'où la règle : pour diviser deux puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher les exposants.

Puissance zéro. — Appliquons la règle précédente à la fraction a^n/a^n , qui est évidemment égale à 1.

On a

$$\frac{a^n}{a^n} = 1 = a^{n-n} = a^0.$$

On est ainsi amené à donner un sens à la puissance zéro d'un nombre qui est donc, par définition, toujours égale à 1 :

$$a^0 = 1$$

quel que soit a .

Exposant négatif. — Soit à diviser maintenant, inversement, a^3 par a^5 . La règle de division des puissances donnerait

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}.$$

Or, on a

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = \frac{1}{a^2}.$$

On peut donc écrire

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

De manière générale,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

On est donc amené à donner une signification à un *exposant négatif* qui symbolise ainsi l'inverse d'une puissance.

Puissances négatives de 10. — D'après ce qui précède on a

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0,001.$$

On voit que l'exposant de la puissance négative de 10 est égal au nombre de zéros qui précèdent le chiffre 1, y compris celui qui est situé avant la virgule. On s'appuie sur

cette propriété pour écrire les nombres décimaux sous une forme condensée ne laissant apparaître que les chiffres significatifs :

C'est ainsi que 0,000 075 par exemple s'écrira 75×10^{-5} .

Racines. — Lorsque nous avons élevé a à la puissance n , nous sommes partis de a , supposé connu, et nous avons calculé sa puissance n^e , soit a^n en le multipliant n fois par lui-même.

Inversement, supposons que nous connaissions la puissance n^e de a , soit $a^n = B$. Nous pouvons nous proposer de rechercher le nombre qu'il a fallu multiplier n fois par lui-même pour obtenir B . Ce nombre qui est évidemment a , est la racine n^e de B , symbolisée $\sqrt[n]{B}$:

$$B = a^n$$

$$\sqrt[n]{B} = a.$$

La racine n^e d'un nombre B est donc le nombre qui, multiplié n fois par lui-même, donne B :

$$\sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{B} \dots n \text{ fois} = B$$

L'opération par laquelle on calcule $\sqrt[n]{B}$ à partir de B , et qui est donc l'opération réciproque de l'élévation à une puissance, est une *extraction de racine* (1).

Un cas particulier important est représenté par la *racine carrée* qui est le nombre, symbolisé $\sqrt{B}$ ou plus simplement $\sqrt{B}$, tel que, multiplié par lui-même, il donne B :

$$\sqrt{B} \cdot \sqrt{B} = B.$$

Par suite de la règle bien connue des signes, le produit $\sqrt{B} \cdot \sqrt{B}$ c'est-à-dire B , sera toujours positif, que $\sqrt{B}$ soit lui-même positif ou négatif.

Seuls, par conséquent, les nombres positifs ont des racines carrées (2).

D'après la définition ci-dessus, on a évidemment

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Mais rien n'empêche, bien entendu, que a figure sous le radical à une puissance différente de n .

(1) Lorsque le nombre B a été obtenu par l'élévation d'un nombre a à une certaine puissance n , il est toujours possible d'extraire sa racine qui n'est autre que a . Mais si l'on prend B et n quelconques il peut se faire qu'aucun nombre entier ou fractionnaire, c'est-à-dire aucun nombre « rationnel » ne soit une solution de $\sqrt[n]{B}$. On est ainsi amené à définir une nouvelle catégorie de nombres, les *nombres irrationnels* dont on peut obtenir seulement des valeurs plus ou moins approchées : $\sqrt{2} \simeq 1,414\dots$, $\pi \simeq 3,1416\dots$, $e \simeq 2,71828\dots$ sont des nombres irrationnels. On montre qu'il est toujours possible de trouver une fraction, en particulier décimale, qui s'approche d'aussi près qu'on le désire de la solution cherchée.

(2) Nous verrons cependant qu'on a été amené à donner un sens à l'expression $\sqrt{-1}$ (cf. Imaginaires, Compléments p. 227).

C'est ainsi que la racine n^{e} de a^p , qui s'écrira $\sqrt[n]{a^p}$, est le nombre tel que, multiplié n fois par lui-même, il donne a^p

$$\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^p} \dots n \text{ fois} = a^p.$$

Exposant fractionnaire. — D'après la règle d'addition des puissances, a^1 , c'est-à-dire a , peut s'écrire

$$a^1 = a^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, d'après la définition des racines, on a

$$a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}.$$

On peut donc écrire

$$\sqrt{a} \text{ (c'est-à-dire } \sqrt[2]{a}) = a^{\frac{1}{2}}.$$

De manière générale on montrerait de la même façon que a , qui est égal au produit de n facteurs égaux à $\sqrt[n]{a}$, c'est-à-dire $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \dots n$ fois, peut s'écrire

$$a = a^{1/n} \cdot a^{1/n} \cdot a^{1/n} \dots n \text{ fois}$$

et que, par suite

$$\sqrt[n]{a} \text{ peut s'écrire } a^{1/n}.$$

Quant à l'expression $\sqrt[n]{a^p}$, on pourra l'écrire $(a^p)^{1/n}$, c'est-à-dire, d'après la règle des puissances d'une puissance,

$$a^{p(1/n)} = a^{p/n}.$$

On aboutit ainsi à la notion d'*exposant fractionnaire* qui permet d'écrire les racines :

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}.$$

Conclusion. — La notion de puissance, limitée initialement, par suite de la définition que nous avons adoptée, aux seules valeurs entières et positives de n , peut donc être généralisée et définie, avec les conventions voulues, pour toutes les valeurs entières ou fractionnaires, positives ou négatives de n ⁽¹⁾.

II. — LOGARITHMES

Définition. — Dans le cours de cet ouvrage nous avons défini les logarithmes à partir de considérations géométriques. Nous allons rappeler ici la définition classique des logarithmes qui les rattache à la notion de puissance :

(1) On montre qu'elle peut être étendue également aux valeurs irrationnelles de n et que l'expression a^x par exemple a une valeur bien définie, que l'on peut calculer à l'aide des logarithmes.

Supposons que nous connaissions la valeur B de la puissance n^{e} d'un nombre a

$$B = a^n,$$

n est appelé le logarithme de B dans le système de base a , ce qui s'écrit

$$n = \log_a B.$$

Le logarithme d'un nombre dans un système de base a est donc l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base pour obtenir ce nombre.

Le logarithme est donc tout simplement *l'exposant de la base* :

Ainsi, dans le système de base 10 le logarithme de 1 000, c'est-à-dire 10^3 , sera 3.

Il résulte de cette définition que les expressions

$$B = a^n \quad \text{et} \quad n = \log_a B$$

sont entièrement équivalentes.

Remarques. — 1° Si nous prenons a positif, B sera toujours positif, même pour les valeurs négatives de n . Il en résulte que, dans ces conditions, *seuls les nombres positifs auront des logarithmes*.

2° Nous avons vu que, quel que soit a , on a

$$a^0 = 1$$

on peut en déduire que *le logarithme de 1 est zéro*, quelle que soit la base.

3° Nous savons également que

$$a = a^1.$$

On peut en déduire que *le logarithme de la base est toujours égal à 1*, quelle que soit la base.

Les différents systèmes logarithmiques. — Tout nombre a positif peut servir de base à un système logarithmique.

En pratique on utilise essentiellement les *logarithmes décimaux* de base 10, encore appelés logarithmes vulgaires, dont l'importance vient du caractère décimal de notre système de numération.

On les note : $\log_1$ ou, plus simplement : $\log$, sans indice.

Dans ce système, à tout nombre positif N correspond son logarithme décimal représenté par une certaine puissance de 10 :

$$N = 10^x, \\ x = \log N.$$

Par ailleurs, on a été amené à individualiser les *logarithmes népériens* dont la base est le nombre irrationnel $e = 2,718\ 28\dots$ encore appelés *naturels* car ils s'introduisent naturellement dans le discours mathématique, ou encore *hyperboliques* car ils peuvent être définis, nous l'avons vu, à partir de l'hyperbole équilatère.

On les symbolise « Log » (avec L majuscule), ou encore « Ln » ou même simplement « L ».

Dans ce système à tout nombre positif N correspond son logarithme népérien représenté par une certaine puissance de e

$$N = e^x,$$

$$x = \log N.$$

Nous avons indiqué page 86 comment on pouvait passer du système népérien au système décimal et inversement.

Signalons enfin les *logarithmes binaires*, de base 2, dont l'intérêt vient du système de numération binaire utilisé par la théorie de l'information.

Logarithme d'un produit. — Soient deux nombres B et C et leurs logarithmes n et m respectivement dans le système de base a .

On a par définition

$$B = a^n, \quad n = \log_a B$$

$$C = a^m, \quad m = \log_a C$$

formons le produit $B \cdot C$.

On a

$$B \cdot C = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$(m+n)$ est donc le logarithme de $B \cdot C$ dans le système de base a .

$$\log_a B \cdot C = m + n$$

c'est-à-dire

$$\log_a B \cdot C = \log_a B + \log_a C$$

Le logarithme d'un produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.

Comme pour les puissances, ceci se généralise, bien entendu, à un produit de plusieurs facteurs :

$$\log A \cdot B \cdot C = \log A + \log B + \log C.$$

Propriétés des logarithmes. — Nous avons vu comment, à partir de cette propriété fondamentale, dite d'additivité des logarithmes, on déduisait le logarithme d'un quotient, de l'inverse d'un nombre, d'une puissance, d'une racine.

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$\log \frac{1}{B} = -\log B$$

$$\log A^p = p \log A$$

$$\log \sqrt[n]{B} = \log B^{1/n} = \frac{1}{n} \log B.$$

III. — ANALYSE COMBINATOIRE

Nous grouperons sous ce titre les notions intervenant dans les dénombrements : permutations, combinaisons, arrangements.

Permutations. — Soient n objets, que nous désignerons par les lettres $a, b, c, d, \dots$, etc., rangés dans n cases numérotées de 1 à n (fig. 227).

1	2	3	4	5
a	b	c	d	e

FIG. 227.

On appelle *permutation* toute suite que l'on peut former avec ces n objets en modifiant simplement l'ordre de ces objets.

Par exemple, en permutant b et c , on a la suite : $a, c, b, d, \dots$, en permutant b et a , la suite : $b, a, c, d, \dots$

Combien de permutations peut-on faire avec n objets ? — Plaçons un objet, a par exemple, dans la case 1. Il nous reste $n-1$ objets.

Supposons que nous connaissions le nombre de permutations possibles avec ces $n-1$ objets, soit P_{n-1} .

N'importe lequel des n objets $a, b, c, \dots$ peut être placé dans la case 1, réalisant chaque fois une permutation nouvelle. Le nombre de permutations possibles avec n objets, soit P_n , sera donc égal à n fois P_{n-1} :

$$P_n = n \times P_{n-1}.$$

Supposons qu'au lieu de partir de n objets, nous soyons partis de $n-1$ objets. Un raisonnement analogue nous aurait montré que le nombre de permutations possibles avec $(n-1)$ objets est

$$P_{n-1} = (n-1) P_{n-2}$$

d'où

$$P_n = n \cdot (n-1) P_{n-2}$$

De la même façon, on aurait

$$P_{n-2} = (n-2) \cdot P_{n-3}$$

et par suite

$$P_n = n \cdot (n-1) (n-2) \cdot P_{n-3}$$

... et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un objet et une seule case, donc une seule permutation possible. Et l'on a finalement

$$P_n = n \cdot (n-1) (n-2) \dots 3, 2, 1.$$

Ce produit de la suite des entiers positifs jusqu'à n s'appelle « produit factoriel n ». On le symbolise $n!$, qui s'énonce « factorielle n » :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

On a donc

$$P_n = n!$$

Combinaisons-arrangements. — Parmi les n objets précédents proposons-nous d'en choisir r , r étant évidemment inférieur à n .

Tout groupe de r objets différents, tel que par exemple (en supposant $r = 3$) abc , bcd , abd ..., etc. que l'on peut former à partir des n objets présents est une combinaison de n objets pris r à r .

Chacun des groupes de r objets ainsi formés peut être rangé à son tour suivant un ordre donné dans des cases numérotées de 1 à r (ainsi la combinaison abc , peut être rangée dans l'ordre abc , bac , bca , ...). Toute suite ainsi formée et qui tient compte par conséquent non seulement de la nature, mais également de l'ordre des objets est appelée arrangement de n objets pris r à r .

Le nombre d'arrangements que l'on peut ainsi faire à partir d'une combinaison donnée n'est pas autre chose, on le voit, que le nombre de permutations possibles avec r objets, soit P_r .

On pourra en faire, bien entendu, autant qu'il y aura de combinaisons.

On peut en déduire que le nombre d'arrangements de n objets pris r à r qu'on symbolise A_n^r est égal au produit du nombre de combinaisons de ces n objets pris r à r , soit C_n^r , par le nombre de permutations possibles avec chaque combinaison de r objets, soit P_r .

$$A_n^r = C_n^r \times P_r$$

Calcul de A_n^r . — Choisissons le premier objet, a par exemple. Il en reste $n-1$ parmi lesquels nous devons choisir $r-1$ objets.

Supposons que nous connaissions le nombre d'arrangements possibles de ces $n-1$ objets pris $r-1$ à $r-1$, soit A_{n-1}^{r-1} .

Le choix du premier objet peut se faire de n façons différentes. Le nombre d'arrangements de n objets pris r à r , soit A_n^r sera donc égal à n fois A_{n-1}^{r-1} .

$$A_n^r = n \cdot A_{n-1}^{r-1}.$$

En raisonnant de la même façon, on voit que

$$A_{n-1}^{r-1} = (n-1) A_{n-2}^{r-2}$$

et par suite

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot A_{n-2}^{r-2}$$

... et ainsi de suite jusqu'au r^{e} objet. Le choix de celui-ci se fera parmi $n-(r-1)$ objets, ce qui représente $n-(r-1)$, soit $(n-r+1)$ choix possibles.

Le nombre total d'arrangements est donc, finalement

$$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

Calcul de C_n^r . — De la formule

$$A_n^r = C_n^r \cdot P_r$$

on tire

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r}.$$

En substituant les deux termes de ce rapport par leurs valeurs, on obtient

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}.$$

Multiplions en haut et en bas par $(n-r)!$, ce que nous écrirons, en explicitant le numérateur :

$$\frac{(n-r)(n-r-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)!}.$$

Il vient

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \times (n-r)(n-r-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r)!}.$$

On voit que le numérateur n'est pas autre chose que $n!$ d'où finalement la formule

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Formule du binôme. — Elle concerne le développement de la n^e puissance du binôme $(a+b)$, soit $(a+b)^n$.

Il s'agit, on le sait, d'effectuer le produit

$$(a+b)(a+b)(a+b) \dots n \text{ fois.}$$

Le résultat se présentera sous la forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de a par exemple

$$(a+b)^n = a^n + k_1 a^{n-1} \cdot b + k_2 a^{n-2} \cdot b^2 + \dots$$

Dans lequel il s'agit de déterminer les coefficients $k_1, k_2, \dots$

Cela revient à chercher tous les arrangements possibles des n facteurs en prenant chaque fois un des termes de chaque binôme.

En réalité, parmi ces arrangements, les permutations ne nous intéressent pas. Il nous est en effet indifférent par exemple d'avoir a^2b ou ba^2 . Ce sont donc seulement les *combinaisons* qui interviennent.

Le coefficient du terme de rang r sera donc donné par le nombre de combinaisons de n objets pris r à r , soit C_n^r

Et le développement du binôme s'écrira

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots$$

Bien entendu le développement est symétrique, car nous aurions pu aussi bien

choisir b que a . On écrira donc

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots \\ \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Explicitons les valeurs de C_n^r . On aura par exemple pour C_n^1

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1!(n-1)!} = \frac{n}{1!}.$$

On voit que les expressions des coefficients se simplifient et l'on peut écrire finalement

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-2)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

Du fait de la symétrie de la formule, les coefficients de deux termes situés à égale distance des extrémités sont identiques.

On peut du reste vérifier que la formule

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

donne la même valeur pour le terme de rang r et pour le terme de rang $n-r$ qui est son symétrique.

Triangle de Pascal. — Les valeurs des coefficients du développement du binôme sont données par un tableau classique dit « *Triangle arithmétique de Pascal* ».

$n \searrow r \rightarrow$	0	1	2	3	4
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Ce tableau, rappelons-le, donne les valeurs de C_n^r en fonction de r et de n .

Le coefficient cherché se trouve à l'intersection de la colonne et de la ligne correspondantes. Ainsi le coefficient du terme de rang 3 dans le développement de $(a+b)^4$ soit C_4^3 sera à l'intersection de la colonne 3 et de la ligne 4, soit 4. Chaque terme est la somme de celui qui se trouve immédiatement au-dessus de lui, soit C_{n-1}^r et de celui qui est immédiatement à gauche de ce dernier, et qui n'est autre que C_{n-1}^{r-1} .

On peut du reste vérifier en appliquant la formule de C_n^r que

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$$

IV. — SUITES. SÉRIES. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

Suites. On appelle *suite* un ensemble de termes qui se succèdent suivant une loi déterminée dite *loi de formation* de la suite.

Ainsi :

- la suite naturelle des nombres : 1, 2, 3, ..., n .
- la suite des inverses : 1, $1/2$, $1/3$, ..., $1/n$, dite encore *suite harmonique* ;
- la *progression arithmétique* 1, 3, 5, 7, ... où chaque terme s'obtient en *ajoutant* au précédent la « raison » de cette progression ici égale à 2 ;
- la *progression géométrique* 1, 2, 4, 8, ... où chaque terme s'obtient en *multipliant* le précédent par la raison ici égale à 2.

etc.

Chaque terme d'une suite est affecté d'un numéro d'ordre qui constitue son *rang* dans la suite. On le désigne souvent par la lettre T (ou U) affectée d'un indice correspondant au rang :

$$T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$$

La *loi de formation* de la suite établit une relation entre la valeur d'un terme et son rang. Elle permet de calculer un terme quand son rang est connu.

C'est ainsi que T_n est égal à n pour la première suite citée en exemple, à $1/n$ pour la deuxième, à $2(n-1)$ pour la troisième et à 2^n pour la dernière.

Série. — On appelle *série* l'expression représentée par la somme des n premiers termes d'une suite

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n.$$

Si S_n tend vers une limite finie S quand n augmente indéfiniment, on dit que la série est *convergente* et S est alors appelée la *somme de la série*. Dans le cas contraire, la série est dite *divergente*.

Interprétation géométrique. — Soit une courbe telle que celle de la figure 228 admettant pour asymptote l'horizontale d'ordonnée y_s .

Soient $A, B, C, \dots$, etc. les points d'abscisse 0, 1, 2, ..., etc. ... n et d'ordonnée

$$y_0 = U_0$$

$$y_1 = U_0 + U_1$$

$$y_2 = U_0 + U_1 + U_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

On voit qu'à mesure que n augmente, c'est-à-dire que l'on prend davantage d'ordonnées, les points correspondants se rapprochent de l'horizontale d'ordonnée y_s .

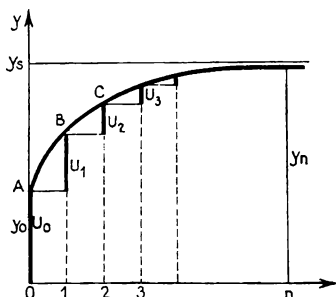


FIG. 228.

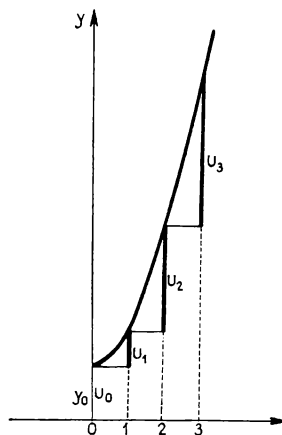


FIG. 229.

La série $y_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

est une *série convergente* et l'ordonnée y_s en représente la limite.

Faisons maintenant la même construction avec une branche de parabole verticale (fig. 229).

On voit que la série envisagée ne tend pas vers une limite, mais augmente au contraire indéfiniment quand n tend vers l'infini : c'est une *série divergente*.

Formule de Maclaurin pour un polynôme. — On montre qu'il est possible, sous certaines conditions, de mettre un polynôme $f(x)$ sous la forme d'une suite dont les termes successifs sont représentés par les dérivées successives f' , f'' , ..., f^n de $f(x)$.

Soit en effet un polynôme $f(x)$ de degré n que nous écrirons dans l'ordre des puissances croissantes de x :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n.$$

Calculons ses dérivées successives en appliquant la formule de dérivation des puissances.

On obtient :

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$$f^n(x) = \dots + \dots + n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

Cherchons ce que deviennent ces expressions pour la valeur $x = 0$.

On a successivement

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1, \text{ ce qui peut s'écrire } 1 \cdot a_1 = a_1 \cdot 1!$$

$$f''(0) = 2 a_2, \text{ ce qui peut s'écrire } 2 \cdot 1 \cdot a_2 = a_2 \cdot 2!$$

$$f'''(0) = 6 a_3, \text{ ce qui peut s'écrire } 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = a_3 \cdot 3!$$

$$f^n(0) = n(n-1)(n-2) \dots a_n = a_n \cdot n!$$

d'où l'on tire

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \dots, \quad a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

En reportant les valeurs des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans l'expression de $f(x)$, on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0)$$

Dans cette expression, on le voit, le polynôme $f(x)$ a bien été mis sous la forme d'une suite dont les termes successifs sont constitués par les dérivées successives de $f(x)$ pour la valeur 0 de la variable. C'est ce qu'on appelle la *formule de Maclaurin pour un polynôme*.

Formule de Maclaurin proprement dite. — On montre que cette formule peut s'étendre à une fonction quelconque à condition qu'elle soit définie, continue et indéfiniment dérivable sur un intervalle comprenant la valeur zéro de la variable.

Cette formule doit alors toutefois être complétée par l'expression

$$[x^{n+1}/(n+1)!] \cdot f^{n+1}(\theta x)$$

dite « terme complémentaire », où θ représente une quantité aussi petite que l'on voudra tendant vers zéro en même temps que x .

On obtient alors la formule générale

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\theta x)$$

qui est la formule de Maclaurin proprement dite.

Développement d'une fonction en série entière. — Cette formule permet donc de mettre sous forme d'un polynôme une fonction $y = f(x)$ quelconque pourvu qu'elle soit définie, continue et indéfiniment dérivable sur un intervalle autour de la valeur zéro de la variable : On dit alors qu'on a *développé* cette fonction en *série entière* autour de la valeur zéro de la variable.

L'intérêt de cette transformation vient de ce que les polynômes sont très maniables,

en particulier il est facile de les dériver, de les intégrer alors que ces manipulations peuvent être ardues sur la forme non polynomiale où se trouve généralement la fonction. D'autre part, et surtout, il est possible par cette transformation d'obtenir un polynôme qui s'approche d'autant près qu'on le désire de la fonction à étudier (on dit qu'on « approche la fonction par un polynôme ») et, par suite, de la calculer avec toute l'approximation désirée ⁽¹⁾. Nous allons en voir quelques exemples.

Développement en série de $\sin x$ et de $\cos x$. — Rappelons que la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$ et que $\cos x$ a pour dérivée $-\sin x$.

On a alors pour le développement de $\sin x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\ f^4(x) &= \sin x, & f^4(0) &= 0, \\ f^5(x) &= \cos x, & f^5(0) &= 1, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, car on est revenu au point de départ.

On voit que les dérivées d'ordre pair sont nulles et les dérivées d'ordre impair valent alternativement $+1$ et -1 . En reportant ces valeurs dans la formule de Maclaurin, on obtient :

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

On calculerait de la même façon le développement en série de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

L'intérêt de ces transformations vient de ce que si x est suffisamment petit, et c'est le cas lorsqu'on se place au voisinage de la valeur zéro de la variable, les termes successifs du développement deviennent de plus en plus petits et peuvent par suite être négligés à partir d'un certain rang.

C'est ainsi que pour un angle α voisin de zéro, on pourra écrire

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

⁽¹⁾ En toute rigueur il conviendrait de prouver chaque fois que la série est bien convergente et que la somme de la série est bien égale à la fonction quel que soit x compris dans l'intervalle de convergence.

Développement de $1/(1+x)$ et $1/(1-x)$. — Calculons les dérivées en appliquant la formule de dérivation d'un quotient.

On a pour $\frac{1}{1+x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x}, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f'(0) &= -1, \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, & f''(0) &= 2 \cdot 1, \\ f'''(x) &= \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, & f'''(0) &= -2 \cdot 3 \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 + \frac{x}{1!}(-1) + \frac{x^2}{2!}(1 \cdot 2) + \frac{x^3}{3!}(-2 \cdot 3) \dots$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots}$$

On trouverait de la même façon

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots}$$

Il est donc possible pour les petites valeurs de x de remplacer $1/(1+x)$ par $1-x$ et $1/(1-x)$ par $1+x$.

Développement de e^x . — Ici les dérivées successives, on le sait, sont toutes égales à la fonction :

$$y = y' = y'' = \text{etc.} = e^x$$

et par suite

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = e^0 = 1.$$

En substituant ces valeurs dans la formule de Maclaurin on obtient le développement en série de e^x

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots}$$

Si dans ce développement, on fait $x = 1$, e^x devient égal à e et l'on a

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots}$$

ce qui permet de calculer e avec toute l'approximation désirée.

On voit, sans qu'il soit nécessaire de s'étendre davantage, tout l'intérêt pratique de ces développements en série entière d'une fonction.

Série de Fourier. — Pour terminer ce chapitre, nous mentionnerons les séries dites de Fourier qui sont des développements en série portant sur des fonctions périodiques.

Rappelons qu'une fonction périodique est une fonction qui repasse périodiquement par les mêmes valeurs, comme c'est le cas par exemple pour les fonctions trigonométriques.

Le temps T au bout duquel le phénomène se reproduit identiquement à lui-même est la *période*. La *fréquence* ν est le nombre de périodes (ou cycles) par unité de temps. Si chaque période dure par exemple $T = 1/10$ s, il est évident que dans une seconde il y en aura 10, soit $1/T$. La fréquence est donc l'inverse de la période : $\nu = 1/T$.

Cela étant, considérons une fonction sinusoïdale de période T et de fréquence ν .

Il est évident qu'une fonction sinusoïdale de période $T/2, T/3, \dots, T/n$ (c'est-à-dire de fréquence $2\nu, 3\nu, \dots, \text{etc.} \dots n\nu$) admettra également pour période T . Ces fonctions sont donc aussi des fonctions périodiques de période T .

La fréquence ν est dite *fréquence fondamentale*. Les fonctions sinusoïdales de fréquence $2\nu, 3\nu, \dots, \text{etc.}$ sont les *harmoniques successifs* de la fréquence fondamentale.

Si l'on superpose plusieurs fonctions sinusoïdales, comme dans la figure 230 par exemple, où l'on a fait la somme algébrique de deux fonctions de période T et $T/3$, on obtient une fonction périodique complexe.

Inversement, on montre qu'une fonction périodique complexe quelconque peut être décomposée en une somme de sinus et de cosinus portant sur les harmoniques successifs de la fréquence fondamentale :

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots$$

La série ainsi obtenue est dite « *série de Fourier* ».

a_0 est un terme constant, $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ sont les *coefficients* de la série dont les termes successifs sont appelés les *harmoniques* d'ordre 2, 3, ..., etc. de la fonction.

Une telle analyse, dite *analyse harmonique* de la fonction, ou encore *analyse de Fourier* permet l'étude approfondie d'un phénomène périodique. Les études des potentiels électriques cérébraux et cardiaques notamment en ont bénéficié. Toutefois, elle conduit à des difficultés d'interprétation qui la font sortir du cadre élémentaire de cet ouvrage.

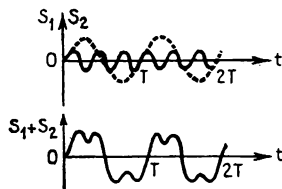


FIG. 230.

V. — IMAGINAIRES

Introduction historique. — Nous avons vu qu'en raison de la règle des signes seuls les nombres positifs pouvaient avoir une racine carrée.

On ne saurait donc parler de la racine carrée d'un nombre négatif tel que -1 par exemple : Il n'existe pas en effet de nombre réel qui, multiplié par lui-même, puisse donner -1 .

Pour tourner certaines difficultés posées par la solution des équations du second et du troisième degré, on a cependant été amené à donner un sens à l'expression $\sqrt{-1}$, dite « imaginaire », et symbolisée i :

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

Simple artifice de calcul à l'origine, cette représentation s'est révélée une méthode féconde qui a permis notamment de généraliser la notion de nombre en individualisant une nouvelle variété de nombres dits « *nombres complexes* », comportant une partie « réelle » et une partie « imaginaire », et dont les nombres réels ordinaires ne représenteraient qu'un cas particulier.

Comme il arrive souvent en mathématiques, ces notions, restées pendant longtemps purement spéculatives, ont trouvé par la suite de nombreuses applications pratiques. En particulier les calculs de l'électronique moderne en ont largement bénéficié.

Racines de -1 . — De l'expression

$$i = \sqrt{-1}$$

on tire

$$i^2 = -1,$$

or i^2 a deux racines $+i$ et $-i$.

On en déduit que -1 a deux racines imaginaires qui sont

$$+i = +\sqrt{-1}$$

et

$$-i = -\sqrt{-1}.$$

Racines d'un nombre négatif. — Soit un nombre négatif a que nous écrirons en faisant précéder sa valeur absolue $|a|$ du signe $-$

$$a = -|a|.$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$a = (-1) \times |a|.$$

On en déduit que

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-1) \times |a|} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{|a|}$$

$\sqrt{-1}$ pouvant correspondre, nous venons de le voir, soit à $+i$, soit à $-i$, on peut écrire

$$\sqrt{a} = i \sqrt{|a|}$$

et

$$\sqrt{a} = -i \sqrt{|a|}.$$

On en déduit que tout nombre algébrique négatif possède deux racines imaginaires $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

Solution de l'équation du second degré. — On sait que la solution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est conditionnée par la valeur de l'expression $\Delta = b^2 - 4ac$, dite « discriminant ».

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

qui correspondent aux points d'intersection de la parabole avec l'axe des x .

Si $\Delta < 0$ (ce qui correspond aux cas où la parabole $ax^2 + bx + c$ est située tout entière au-dessus ou au-dessous de l'axe des x), la théorie élémentaire enseigne que l'équation n'admet pas de racines.

En fait, en appliquant les notions ci-dessus, on voit qu'on peut considérer que dans ce cas la quantité négative Δ admet deux racines imaginaires

$$+i\sqrt{|\Delta|} \quad \text{et} \quad -i\sqrt{|\Delta|}$$

et que par suite l'équation admet deux racines

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

qui sont cette fois des racines « imaginaires ».

Il en résulte qu'un trinôme du second degré admet toujours deux racines. Ces racines sont réelles si $\Delta > 0$, imaginaires si $\Delta < 0$.

De manière générale du reste on montre que tout polynôme de degré n admet n racines, réelles ou imaginaires : c'est le théorème dit « théorème fondamental de l'algèbre » ou encore « *théorème de d'Alembert* » dont l'importance doctrinale justifierait déjà à elle seule l'intérêt de la théorie des imaginaires.

Nombres complexes. — On appelle nombre complexe ⁽¹⁾ une quantité de la forme

$$z = a + ib$$

où a et b sont des nombres algébriques.

a est la partie « réelle » du nombre complexe et ib sa partie « purement imaginaire ».

- Si b est nul, le nombre complexe se réduit à sa partie réelle a ;
- Si a est nul, le nombre complexe se réduit à sa partie purement imaginaire ib ;
- Si a et b sont nuls, et seulement dans ce cas, le nombre complexe est nul.
- Pour que deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ soient égaux, il faut donc que leurs parties réelles soient égales ($a = a'$) et que leurs parties imaginaires le soient également ($b = b'$).

(1) Encore appelés à tort mais très communément « nombres imaginaires ».

Module d'un nombre complexe. — C'est un nombre positif ρ défini par la relation

$$\rho^2 = a^2 + b^2.$$

Le module d'un nombre complexe correspond à ce qu'est pour un nombre réel sa valeur absolue.

Dans ce dernier cas, en effet, $b = 0$.

D'où

$$\rho^2 = a^2$$

et

$$\rho = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Aussi le module ρ d'un nombre complexe est-il souvent symbolisé $|\rho|$

$$|\rho| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Imaginaire conjugué. — Etant donné le nombre complexe $z = a + ib$, on appelle *imaginaire conjugué* de z , un nombre, symbolisé z^* tel que

$$z^* = a - ib,$$

a et b étant communs à z et à z^* , il s'ensuit que z et son imaginaire conjugué z^* ont même module

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Opérations sur les nombres complexes. — Elles se font suivant les mêmes lois que pour les nombres algébriques en traitant les nombres complexes comme des polynômes. On prend soin seulement de bien séparer dans l'expression des résultats la partie réelle de la partie purement imaginaire.

C'est ainsi que pour l'*addition* et la *soustraction* de deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, on aura

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

et

$$z - z' = (a - a') + i(b - b').$$

La partie réelle du nombre somme (ou différence) est donc la somme (ou la différence) des parties réelles. De même, la partie imaginaire est la somme (ou la différence) des parties imaginaires.

Pour la *multiplication*, on aura

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + i(ba' + ab') + i^2 bb' \\ &= aa' + i(ba' + ab') + (-1) \cdot bb' \\ z \cdot z' &= (aa' - bb') + i(ba' + ab'). \end{aligned}$$

On montre enfin que le *quotient* z/z' de deux nombres complexes est un nombre complexe dont la partie réelle est égale à

$$\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}$$

et la partie imaginaire à

$$i \cdot \frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}.$$

Représentation graphique d'un nombre complexe. — Un nombre complexe est susceptible au même titre qu'un nombre réel d'une représentation graphique. Celle-ci n'est plus cependant un point sur un axe mais un point dans un plan.

Le plan, dit « plan complexe », est rapporté à deux axes rectangulaires. L'un horizontal, appelé « axe réel », supporte la partie réelle du nombre complexe. L'autre, vertical, dit « axe imaginaire », supporte la partie imaginaire ib du nombre complexe (fig. 231).

Le point M est l'image ponctuelle du nombre complexe dont le vecteur OM représente le modèle vectoriel. La longueur arithmétique du vecteur OM représente le *module* du nombre complexe (on a en effet $\rho^2 = a^2 + b^2$). L'angle θ de OM avec l'axe réel est appelé *argument* du nombre complexe z , noté : $\arg. z$.

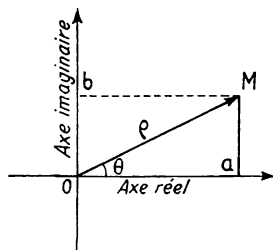


FIG. 231.

Expression trigonométrique d'un nombre complexe. — La représentation géométrique précédente nous permet de comprendre que la partie réelle a d'un nombre complexe est la projection sur l'axe réel du vecteur OM .

$$a = OM \cos \theta = \rho \cos \theta$$

et que sa partie imaginaire b est la projection de OM sur l'axe imaginaire

$$b = OM \sin \theta = \rho \sin \theta.$$

Le nombre complexe $z = a + ib$ peut donc s'écrire

$$z = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

ce qui est l'expression trigonométrique du nombre complexe z .

Produit de deux nombres complexes. — Cette expression trigonométrique de z va conférer une forme particulière au produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 . On aura en effet

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i^2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2].$$

En remplaçant, comme toujours, i^2 par -1 , on a

$$z \cdot z' = \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2)] .$$

Les parenthèses représentent respectivement les développements de $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ et de $\sin(\theta_1 + \theta_2)$.

D'où, finalement,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] .$$

Ainsi le produit de deux nombres complexes a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.

Signification de l'opération « imaginaire ». — Les données précédentes permettent de dégager la signification de l'opération « imaginaire ».

il peut s'écrire en effet

$$i = 1 \times 0 + i \times 1 = 1 [0 + i \cdot 1] = 1 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] .$$

Le symbole imaginaire i peut donc être considéré comme un nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Le nombre réel a (ou b) peut, quant à lui, s'écrire

$$a = a \times 1 + i \cdot 0 = a [1 + i \cdot 0] = a [\cos 0 + i \sin 0] .$$

On peut donc le considérer comme un nombre complexe ayant pour module sa valeur absolue a (ou b) et d'argument zéro.

Lorsque nous multiplions le nombre réel b par l'imaginaire i nous obtenons un nombre complexe dont le module est égal au produit des modules, soit $b \times 1 = b$ et dont l'argument est la somme des arguments, soit

$$0 + \frac{\pi}{2} = + \frac{\pi}{2} .$$

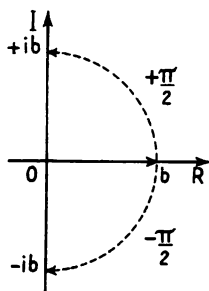


FIG. 232.

On imprime donc au vecteur b porté par l'axe réel une rotation d'un quart de tour qui l'amène sur l'axe imaginaire. L'opération imaginaire de multiplication par i correspond donc à une rotation de $+\pi/2$ (fig. 232).

On verrait de la même façon que l'opération imaginaire $-i$ correspond à une rotation de $-\pi/2$ amenant b sur la partie inférieure de l'axe imaginaire. On obtient ainsi l'imaginaire conjugué $z^* = a - ib$ (fig. 232).

Quant à l'opération i^2 , elle donne un vecteur de module $1 \times 1 = 1$ et d'argument $\pi/2 + \pi/2 = \pi$. On retrouve donc l'axe réel, mais du côté négatif, ce qui est logique puisqu'on a multiplié par -1 .

Les nombres réels et les nombres imaginaires forment donc un système parfaitement cohérent.

Exponentielle imaginaire. — On a été amené à donner un sens à l'exponentielle

e^{ix} , encore notée : $\exp ix$

où l'exposant de e est l'imaginaire pur ix (x étant un nombre réel).

Développons e^{ix} . (Il suffit de remplacer x par ix dans le développement de e^x) :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

Remplaçons i^2 par -1 dans les puissances successives de i

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Séparons les termes réels des termes imaginaires

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right) \dots$$

On reconnaît dans les parenthèses respectivement les développements de $\cos x$ et de $\sin x$ précédemment étudiés.

D'où

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

De la même façon on aurait

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

e^{ix} est donc une fonction imaginaire de x de module 1 et d'argument x .

Ces exponentielles imaginaires sont exploitées pour simplifier dans certains cas les calculs portant sur les lignes trigonométriques.

Soit en effet par exemple la quantité $y = a \cos x$.

Il peut être plus commode de la remplacer par la quantité

$$z = y + ai \sin x = a \cos x + ai \sin x = a (\cos x + i \sin x) = a \exp ix.$$

Le cosinus est alors remplacé par une exponentielle imaginaire dont le maniement, pour le calcul différentiel et intégral, est plus simple, et l'on ne garde du résultat final que sa partie réelle. L'étude des courants alternatifs par exemple a largement bénéficié de ces notions.

Solutions imaginaires de l'équation différentielle de second ordre. — Les exponentielles imaginaires trouvent également une application importante dans la solution de certaines équations différentielles du second ordre. Dans le cas que nous avons étudié, nous avons supposé que l'équation caractéristique avait deux racines réelles r_1 et r_2 . En fait, ceci n'est réalisé, nous le savons, que si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $b^2 - 4ac$ est négatif, l'équation caractéristique a deux racines imaginaires r_1 et r_2

$$r_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$r_2 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

qui fournissent des solutions imaginaires à l'équation différentielle du second ordre.

Posons

$$-\frac{b}{2a} = m,$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = n.$$

On a alors

$$r_1 = m + in$$

$$r_2 = m - in.$$

La solution générale

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

de l'équation différentielle s'écrit alors

$$y = A \cdot e^{(m+in)x} + B \cdot e^{(m-in)x}$$

soit

$$y = A \cdot e^{mx} \cdot e^{inx} + B \cdot e^{mx} \cdot e^{-inx}.$$

C'est-à-dire

$$y = e^{mx} [Ae^{inx} + Be^{-inx}].$$

Mais les exponentielles imaginaires e^{inx} et e^{-inx} peuvent s'écrire

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

$$e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx.$$

La relation précédente devient

$$y = e^{mx} [\cos nx (A + B) + i \sin nx (A - B)]$$

et si l'on pose

$$A + B = A'$$

et

$$i(A - B) = B'$$

on peut l'écrire

$$y = e^{mx} (A' \cos nx + B' \sin nx).$$

Si maintenant on pose

$$A' = D \cos \varphi$$

$$B' = D \sin \varphi.$$

La parenthèse peut se mettre sous la forme

$$\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b = \cos (a + b)$$

c'est-à-dire ici $\cos (nx + \varphi)$.

La solution générale s'écrit alors

$$y = D \cdot e^{mx} \cdot \cos (nx + \varphi).$$

C'est une sinusoïde « amortie » par l'exponentielle e^{mx} (fig. 233).

Une telle fonction intervient dans de nombreux problèmes de physique.

Remarquons que si $b = 0$, $m = 0$, e^{mx} devient égal à 1 : on retrouve l'équation du mouvement alternatif sinusoïdal qui ne comporte pas d'amortissement.

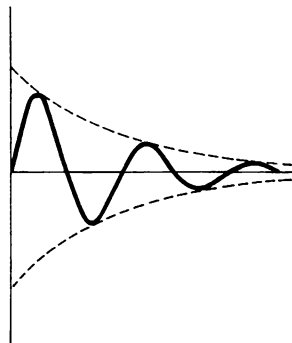


FIG. 233.

Autres applications des imaginaires. — En dehors de leur utilisation dans les calculs dont nous venons de donner un aperçu, les imaginaires ont de nombreuses applications en géométrie métrique et analytique.

En géométrie métrique plane, un vecteur est représentable par un nombre complexe. Les opérations à faire sur ce vecteur peuvent dans certains cas bénéficier du calcul par les nombres complexes. De même en électricité où il est d'usage de représenter une fonction sinusoïdale par un vecteur (représentation de Fresnel). L'utilisation des nombres complexes permet alors de traiter les problèmes de courants alternatifs par des formules analogues à celles des courants continus.

En géométrie analytique, on est conduit à admettre des coordonnées de nature complexe. Les points correspondants sont alors, bien entendu, des points « imaginaires ». C'est ainsi que, dans un plan, un cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et une droite d'équation $y = ax + b$ se couperont, s'ils ne sont pas tangents, en deux points réels ou imaginaires suivant que l'équation correspondant aux abscisses des intersections

$$(1 + a^2) x^2 + 2 abx + b^2 - R^2 = 0$$

aura des racines réelles ou imaginaires.



DÉRIVÉES ET INTÉGRALES USUELLES

FONCTION	DÉRIVÉE.	INTÉGRALE
$y = x$	$\frac{d(x)}{dx} = 1$	$\int x \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 + C$
$y = x^2$	$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$	$\int x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} x^3 + C$
$y = x^n$	$\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$	$\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$	$\int \frac{dx}{x} = \text{Log } x + C$
$y = e^x$	$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$	$\int e^x \cdot dx = e^x + C$
$y = e^{-x}$	$\frac{d(e^{-x})}{dx} = -e^{-x}$	$\int e^{-x} \cdot dx = 1 - e^{-x} + C$
$y = e^{-kx}$	$\frac{d(e^{-kx})}{dx} = -k e^{-kx}$	$\int e^{-kx} \cdot dx = \frac{1}{k} (1 - e^{-kx}) + C$
$y = \text{Log } x$	$\frac{d(\text{Log } x)}{dx} = \frac{1}{x}$	$\int \text{Log } x \cdot dx = x (\text{Log } x - 1) + C$
$y = \sin x$	$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$
$y = \cos x$	$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$	$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$

INDEX ANALYTIQUE DES APPLICATIONS

Les chiffres renvoient aux numéros des pages.

Les applications relatives à la médecine isotopique sont signalées par un astérisque.

- * Absorption d'un rayonnement, 117
- Adsorption, 52
- Audiogramme, 99
- Audiométrie, 98

- Boucle de régulation, 151, 156
- Boucle respiratoire, 71
- B.S.P. (Epreuve à la), 121, 159

- * Cardiogramme isotopique, 131
- Cercles à calcul, 94
- Chromatographie par adsorption, 52
- Chronaxie, 45
- Cinétique chimique exponentielle, 126
- Cinétique des réactions monomoléculaires irréversibles, 138, 175
- Cinétique des réactions réversibles du premier ordre, 185
- Cinétique des réactions chimiques du deuxième ordre, 177
- * Clearance fractionnelle, 121
- Coefficient d'assimilation glucidique, 122, 149
- * Coefficient linéaire d'absorption, 118
- Coefficient massique d'absorption des Rayons X, 42
- Constante de croissance, 54
- * Constante de désintégration radio-active, 115
- Constante de dissociation, 100
- Constante de Michaelis, 49
- * Constante de temps, 134
- * Couche de demi-atténuation, 119
- * Courbe d'activation du lit capillaire périphérique, 141
- * Courbe de dilution, 72

- Courbe de disparition plasmatique de la B.S.P., 149
- * Courbe de lavage, 128
- Courbe de saturation de l'hémoglobine, 47
- Courbes de survie, 133
- Croissance d'une population fermée, 179

- * Débit cardiaque, 71, 197
- * Débit d'organes, 73
- * Débit hépatique, 179
- Débit ventilatoire, 137
- Décharge aperiodique d'un condensateur, 133
- Décibel, 98
- * Demi-vie biologique, 124
- * Demi-vie d'une substance radio-active, 115
- * Désintégration radio-active, 113
- Diagramme Pression-Volume, 69
- * Dilution exponentielle, 128
- * Dose totale délivrée par un radio-élément, 145
- Droite d'étalonnage, 39

- Echelle logarithmique, 89
- Electrophorèse des protéines sériques, 165
- Elimination rénale exponentielle, 119
- Entropie, 201, 207
- Epreuve à la B.S.P., 121, 159
- * Epreuve à l'or colloïdal radio-actif, 159
- * Epreuve de fixation thyroïdienne à l'Iode radio-actif, 153

- Epreuve d'hyperglycémie intraveineuse, 122
- Erreurs (Calculs d'), 197
- * Espaces de distribution, 157
- * Fer marqué, 158
- Fonction pH d'un système tampon équimoléculaire, 102
- Formule de Fick, 197
- Formule de Henderson-Hasselbach, 100
- * Formule de Ketty-Schmidt, 73
- Formule de Michaelis-Menten, 49
- Gradient bilio-plasmatique, 149
- Gradient de concentration, 165
- Graphique de Lineweaver-Burk, 49
- Graphique de Wegel, 98
- Hémikrèse, 119
- Isothermes de Freundlich, 52
- Isothermes des gaz parfaits, 192
- Loi de Boyle-Mariotte, 192
- Loi de Bragg-Pierce, 42
- Loi de Lambert, 117
- Loi de Newton, 134
- Loi de Malthus, 179
- Loi de Weiss, 45
- Lois de croissance, 54
- Moment d'inertie d'un cylindre, 209
- * Or colloïdal radio-actif (Epreuve à l'), 159
- * Perfusions à débit constant, 140
- * Période biologique, 124
- * Période radio-active, 115
- pH, 99, 102
- pK, 100
- Planimétrie, 68
- Potentiel d'oxydo-réduction, 6
- Quantité d'électricité, 69
- * Radio-cardiogramme, 131
- Régulation par action intégrale, 151
- Refroidissement d'un corps chaud, 134
- Règles à calcul, 94
- Relation effets-dose, 96
- Rhéobase, 45
- Sédimentation des particules d'une solution colloïdale, 165
- Systèmes tampon, 101, 102
- Transformation adiabatique d'un gaz parfait, 200
- * Transformations radio-actives, 138, 181
- * Transit de la thyroxine marquée, 125
- Trend logistique, 169
- * Turn-over, 125
- * Vidange exponentielle, 127
- * Vie moyenne d'un radio-élément, 146
- Vitesse de réaction enzymatique, 49, 177

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Les chiffres renvoient aux numéros des pages

A

Abaque à lignes de niveau, 192
Accroissement, 19
Additivité des logarithmes, 77
Affine (Fonction), 38
Aire intégrale, 55
Alembert (Théorème de d'), 229
Analyse combinatoire, 218
Analyse harmonique, 227
Anamorphose linéaire, 39, 53, 93
Antilogarithmes, 89
Argument d'un nombre complexe, 231
Arrangements, 219
Axes de coordonnées, 8

B

Base d'un système logarithmique, 79, 216
Binôme (Formule du), 220
Bi-univoque (Correspondance), 9
Bornes d'intégration, 64
Bornes d'un intervalle, 11
Build-up curve, 136

C

Calcul de surfaces, 67
Calcul des dérivées (Notions sur le), 28
Calcul intégral (Aperçus sur le), 66
Calcul (Règles et cercles à), 94
Calcul d'erreurs, 197
Calcul logarithmique, 88
Caractéristique (Equation), 189
Caractéristique d'un logarithme, 89
Cercles à calcul, 94
Coefficient angulaire, 36
Combinaisons, 218
Complexes (Nombres), 229

Conditions initiales d'intégration, 61
Constante de temps, 134
Constante d'intégration, 60
Coordonnées cartésiennes, 8
Coordonnées logarithmiques, 93
Coordonnées semi-logarithmiques, 93
Correspondance biunivoque, 9
Courbe de dilution, 72
Courbe d'égal niveau, 192
Courbe de Gauss, 163
Courbe en cloche, 161
Courbe logistique, 167
Courbe sigmoïde, 164
Courbe représentative d'une fonction, 8
Courbure des courbes, 24

D

Dérivée (Fonction), 22
Dérivée en un point, 19
Dérivée (Propriétés fondamentales de la),
22
Dérivée d'une somme, 30
Dérivée d'un produit, 31
Dérivée d'un quotient, 32
Dérivée d'une fonction de fonction, 32
Dérivée d'une fonction inverse : 33
Dérivée de $\log x$, 76
Dérivée de $\log kx$, 77
Dérivée seconde, 34
Dérivée d'ordre n , 35
Dérivée partielle, 194
Dérivée partielle seconde, 201
Dérivée prise à θ constant, 199
Dérivées élémentaires, 29
Dérivées (Notions sur le calcul des), 28
Dérivées usuelles (Tableau des), 237
Développement en série, 222

Différentiel (Élément), 57
 Différentielle (Notation), 26
 Différentielle (Expression géométrique de la), 26
 Différentielle totale, 195
 Différentielle totale exacte, 202
 Différentielles (Equations), 170
 Discontinuité, 44
 Discriminant, 229

E

Equation caractéristique, 189
 Equation différentielle, définition, 170
 Equation différentielle (Résolution d'une), 171
 Equation différentielle du premier ordre, 172
 Equation différentielle de la Loi exponentielle, 173
 Equation différentielle de la désintégration radio-active, 174
 Equation différentielle du deuxième ordre, 188
 Equation différentielle linéaire du premier ordre, 180
 Equation différentielle linéaire de la décomposition radio-active, 181
 Exponentiel (Equilibre), 157
 Exponentielle e^x , 105
 Exponentielle e^{-x} , 107
 Exponentielle e^{-kx} , 109, 145
 Exponentielle ascendante, 135
 Exponentielle imaginaire, 232
 Exponentielle (Somme), 152
 Exponentielle (Différence), 154
 Exponentiels (Termes), 148
 Exposant, 211
 Exposant négatif, 213
 Exposant fractionnaire, 215

F

Facteur intégrant, 204
 Factorielle, 218
 Facteur constant (dérivation d'un), 30
 Facteur constant dans une intégrale, 66
 Fonction affine, 38
 Fonction continue, non continue, 11, 21, 44

Fonction croissante, décroissante, 12
 Fonction définie, non définie, 10
 Fonction de fonction, 32
 Fonction dérivée, 22
 Fonction intégrale, 58, 60
 Fonction linéaire, 38
 Fonction logarithmique, 75
 Fonction primitive, 22, 60
 Fonction puissance, 52
 Fonctions algébriques, 36
 Fonctions de points, 190
 Fonctions de plusieurs variables, 190
 Fonctions exponentielles, 105
 Fonctions inverses, 9, 33
 Fonctions réciproques, 9, 33
 Fourier (Série de), 227

G

Graphe d'une fonction, 9
 Graphiques, 5
 Graphiques logarithmiques, 93
 Graphiques semi-logarithmiques, 94

H

Harmonique (Analyse), 227
 Hyperbole équilatère, 44, 46

I

Imaginaires, 227
 Imaginaire conjugué, 230
 Intégral (Calcul), 66
 Intégrale (Aire), 55
 Intégrale (Fonction), 58
 Intégrale définie, 62, 63, 65
 Intégrale indéfinie, 62
 Intégrale curviligne, 205
 Intégrales multiples, 208
 Intégrales usuelles (Tableau des), 237
 Intégration (Bornes d'), 64
 Intégration (Conditions initiales), 61
 Intégration d'une équation différentielle, 171
 Intervalle de variation, 11

L

Lignes de niveau, 191
 Logarithmes, généralités, 215

Logarithmes naturels ou népériens, 74
Logarithmes vulgaires, 83
Logarithmes décimaux, 86
Logarithmique (Fonction), 75
Logarithmique (Echelle), 89
Logarithmiques (Calculs), 88
Logarithmiques (Coordonnées), 93
Logarithmiques (Systèmes), 216

M

Maclaurin (Formule de), 223
Mantisse d'un logarithme, 89
Maximum, minimum d'une fonction, 12
Module d'un système logarithmique, 84
Module d'un nombre complexe, 230

N

Nombre e , 79, 226
Nombres complexes, 229

P

Pascal (Triangle de), 221
Pente d'une droite, 13
Pente d'une exponentielle, 110
Pente en un point d'une courbe, 14
Pente le long d'un chemin donné, 198
Permutations, 218
Point d'inflexion, 25
Point singulier, 28
Primitive d'une fonction, 22, 60

Produit factoriel, 218
Progressions, 222
Puissance (Fonction), 52
Puissance d'un nombre, 211

R

Racines d'un nombre positif, 214
Racines d'un nombre négatif, 228
Racines imaginaires de l'équation du second degré, 229
Raison d'une progression, 222
Réciproque (Fonction), 9, 33
Règles à calcul, 94

S

Semi-logarithmiques (Coordonnées, graphiques), 93
Série de Fourier, 227
Série (Développement en), 224
Schwartz (Théorème de), 202
Suites, 222

T

Théorème de d'Alembert, 229
Théorème de Schwartz, 202
Triangle de Pascal, 221

V

Variable indépendante, 7



MASSON, Editeur.
120, boulevard Saint-Germain
75280 Paris Cedex 06
4^e trimestre 1978

Imprimé en France

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
av. d'Embrun, 05002-GAP
Dépôt légal 328-1978

EXPLICATION de p 29 :

Les méthodes usuelles de la calcul de la dérivée sont :

1°) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$; l étant le nombre dérivé.
Si l'existe alors $f'(x_0) = l$.

2°) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l$; l étant le nombre dérivé

3°) Les méthodes sont sous la forme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = l$.

Il y a une technique plus facile qui (voir p 29) : voir :

$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ soit $f(x) = x^2$ alors on a :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 = x^2 + \Delta x(2x + \Delta x)$$
$$= y + 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

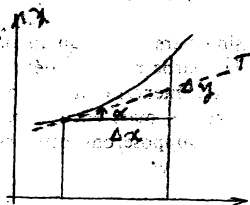
cette forme s'exprime par $\Delta x K = \Delta y$ ou encore $\Delta x + K = \Delta y$
où aussi $2 + K\Delta x = \Delta y$ (et K des réels (constantes))

en cherchant le K on trouve la dérivée $K = f'(x) = 2x$

cela s'explique graphiquement par :

comme on a dit que $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$.

$$\text{soit } dy = \tan \alpha \cdot dx = K \cdot dx$$



donc la dérivée se trouve par quoi multiplier Δx pour
obtenir Δy . $\Rightarrow \Delta y = \tan \alpha \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$ car pour x nous
savons que $y = f(x)$ donc on peut dire que

$$y = f(x) \Leftrightarrow y + \Delta y = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x = f(x + \Delta x) ?$$